TRAITÉ

DE

LA RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

PAR

L. SAINT-LOUP

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE STRASBOURG

PARIS

MALLET-BACHELIER, LIBRAIRE-ÉDITEUR

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Augustins, 55

1861



STRASBOURG,
IMPRIMERIE DE VEUVE BERGER-LEVRAULT.

PRÉFACE.

On s'est proposé de donner, dans cet ouvrage, les méthodes les plus simples et les plus pratiques qui puissent conduire à la résolution des équations numériques quelconques, algébriques ou transcendantes.

Comme la résolution des équations repose essentiellement sur la connaissance de la marche de la fonction représentée par le premier membre, le second membre étant zéro, l'étude des fonctions que l'on rencontre dans les équations a dû précéder l'exposition des méthodes qui servent à les résoudre.

Après avoir montré comment, par des calculs directs, on pouvait obtenir les racines d'une équation algébrique de degré inférieur au cinquième, on a exposé les procédés les plus rapides qui permettent de séparer d'une manière certaine toutes les racines réelles d'une équation algébrique, de découvrir les racines d'une équation transcendante et de les calculer avec autant d'approximation que l'on voudra.

L'emploi des constructions graphiques étant d'un puissant secours quand il a pour résultat de substituer l'étude de deux fonctions à celle d'une fonction unique et complexe, on a cherché à mettre en évidence les avantages qu'il présente dans des cas nombreux.

Des exemples numériques multipliés ont été donnés pour montrer la simplicité des calculs auxquels conduisent les méthodes employées.

Comme on rencontre souvent, dans les applications des mathématiques, des équations renfermant un paramètre arbitraire, un chapitre spécial a été consacré aux différences et à l'interpolation, et on y a traité quelques exemples empruntés à la mécanique. Des tables numériques d'une étendue suffisante ont été réunies pour faciliter les calculs que nécessite la résolution des équations.

En consultant la table des matières, le lecteur se rendra aisément compte de l'esprit général de cet ouvrage et de l'utilité pratique qu'il peut présenter à ceux qui ont à résoudre des questions analogues à celles qui y sont développées.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

CHAPITRE Ier.

Notions préliminaires.

CHAPITRE II.

Étude des fonctions d'une variable.

LIVRE II.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE Ier.

Principes de la résolution des équations.

CHAPITRE II.

Des racines.

LIVRE III.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

CHAPITRE Ier.

Des équations dont les racines peuvent être calculées directement.

CHAPITRE II.

Des équations dont les racines ne peuvent être calculées directement.

CHAPITRE III.

Recherche des racines commensurables d'une équation algébrique.

CHAPITRE IV.

Recherche des racines incommensurables.

CHAPITRE V.

De l'emploi des courbes à la séparation des racines d'une équation.

CHAPITRE VI.

Méthodes d'approximation pour le calcul des racines.

CHAPITRE VII.

Applications.

CHAPITRE VIII.

LIVRE IV.

DES DIFFÉRENCES ET DE L'INTERPOLATION.

CHAPITRE Ier.

CHAPITRE II.

De l'interpolation.

CHAPITRE III.

Des équations qui renferment un paramètre arbitraire.

CHAPITRE IV.

Tables numériques.

RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

LIVRE I.

DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

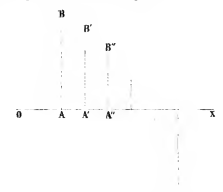
Représentation géométrique d'une fonction d'une variable.

Lorsque deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, à chaque valeur de l'une d'elles correspond généralement une valeur de l'autre. Ainsi la tension de la vapeur d'eau dépend de la température; à chaque valeur de celle-ci, correspond une valeur de la tension et réciproquement. On dit alors que l'une des grandeurs est une fonction de l'autre; celle qui reçoit des valeurs arbitraires se nomme la variable indépendante, ou simplement la variable; l'autre s'appelle la variable dépendante ou plus ordinairement la fonction. Désignons la variable par x et la fonction par y, la relation qui lie y à x sera définie par l'équation :

$$y = f(x).$$

Pour nous représenter d'une manière sensible la liaison de ces deux grandeurs, convenons de porter sur une ligne horizontale $0x$, à partir d'une origine fixe 0, des longueurs ou

abscisses représentant les valeurs données à la variable, de la gauche vers la droite quand ces valeurs sont positives, et en sens contraire quand elles sont négatives.



Soit OA une valeur de x; au point A, menons une perpendiculaire à Ox, et prenons à partir du point A une longueur verticale ou ordonnée, représentant la valeur correspondante $y = f(OA)$, au-dessus de Ox si cette valeur est positive et au-dessous si elle est négative, nous obtiendrons ainsi dans le plan un point B. Soit OA' une autre valeur de x, répétons la même construction, nous aurons un nouveau point B'. Nous pourrons ainsi nous procurer autant d'ordonnées que nous voudrons, c'est-à-dire figurer les valeurs de la fonction correspondant à des valeurs de la variable aussi rapprochées que l'on voudra.

2. *Continuité.* On dit qu'une grandeur varie d'une manière continue ou par degrés infiniment petits quand cette grandeur passe d'une valeur à une valeur voisine, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. C'est ainsi que, dans le mouvement d'un mobile sur une ligne, la distance du mobile à un point fixe varie d'une manière continue quand le mobile passe d'une position A à une autre B; la différence AB des chemins parcourus est dite finie et les portions de chemin aussi petites que l'on voudra en lesquelles on peut supposer partagé le chemin AB sont dites infiniment petites.

Une quantité infiniment petite n'est donc pas une quantité

dont la grandeur soit assignable et que l'on puisse qualifier de grande ou de petite, mais une grandeur variable qui sans être nulle, peut toujours être supposée plus petite que toute grandeur donnée.

3. *Continuité d'une fonction.* Soit une fonction

$$y = f(x);$$

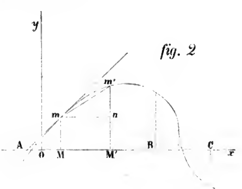
donnons à x une valeur a, soit b la valeur correspondante d'y.

$$b = f(a).$$

Si a reçoit un accroissement h, b prend un accroissement k positif ou négatif déterminé par la relation

$$b + k = f(a + h).$$

Cela posé, la fonction est dite continue, si k devient infiniment petit en même temps que h. Une fonction continue entre deux valeurs OA, OB de la variable sera donc représentée par une courbe obtenue en joignant les extrémités des ordonnées correspondant à des valeurs infiniment voisines de la variable, ou en joignant par un trait que l'on nomme continu les extrémités des ordonnées correspondant à des valeurs suffisamment voisines de cette variable.



Soit $OM = a$, on aura $Mm = b$, soit $MM' = h$, $m'n$ sera égal à k,

4. *Dérivée d'une fonction.* Le rapport $\frac{k}{h}$ a pour chaque va-

leur de h une valeur particulière. Soit menée la corde mm', on aura

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tg} m'mn;$$

imaginons que h décroisse indéfiniment; k tend par hypothèse vers zéro, puisque la fonction est continue, la corde $m'm$ a pour limite une tangente à la courbe au point m, et l'angle $m'mn$ devient à la limite égal à l'angle de cette tangente avec $0x$. Soit α cet angle on a

$$\frac{\lim k}{\lim h} \text{ ou } \lim \frac{k}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

d'où l'on voit que

Le rapport de l'accroissement infiniment petit d'une fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable a en général une limite finie. Ce rapport est ce que l'on nomme la *dérivée* de la fonction. On peut dire aussi : *La dérivée d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable quand celui-ci tend vers zéro.*

La valeur de ce rapport est évidemment une fonction de x, et on peut aussi en considérer la dérivée, que l'on nomme la *dérivée seconde* de la fonction proposée. La dérivée de la dérivée seconde se nommera de même la *dérivée troisième* de la fonction donnée et ainsi de suite.

5. *Caractère de continuité. Quand la dérivée d'une fonction reste finie dans l'intervalle de deux valeurs* a, a' *de la variable, la fonction est continue dans cet intervalle.*

En effet, quand h tend vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ ne peut avoir une limite finie que si k tend aussi vers zéro.

Observons que la dérivée d'une fonction peut devenir infinie pour une certaine valeur de la variable, sans que la fonction cesse d'être continue dans le voisinage de cette valeur, c'est ce qu'on voit sur la figure 2; la dérivée devient infinie dans l'intervalle BC sans que la fonction cesse d'être continue. Il n'est donc point nécessaire que la dérivée reste finie pour que

la fonction soit continue, il suffit que la fonction ne devienne pas infinie en même temps que la dérivée.

6. *Notations.* Représentons par Δx, un accroissement arbitraire donné à une variable x, par Δy l'accroissement correspondant de la fonction y. On a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Désignons par y' ou $f'(x)$ la dérivée de $y = f(x)$, on a par définition

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x).$$

Si ε désigne une quantité qui devient nulle quand Δx devient infiniment petit, on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

ou

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon] \Delta x.$$

Ainsi :

7. *L'accroissement d'une fonction est égal à l'accroissement de la variable multiplié par la dérivée augmentée d'une quantité qui tend vers zéro en même temps que cet accroissement.*

Si on passe à la limite dans l'égalité précédente, on a

$$\lim \Delta y = f'(x) \lim \Delta x$$

ce que l'on écrit plus simplement :

$$dy = f'(x)\, dx$$

ou

$$dy = y' dx.$$

L'accroissement infiniment petit dx de la variable s'appelle la différentielle de la variable, dy est la différentielle de la fonction. L'égalité précédente ne présente de sens précis que si l'on imagine qu'on a divisé les deux membres par dx, et elle sert alors à définir la dérivée de $f(x)$ ou y'.

8. Il résulte du théorème énoncé § 7, que l'accroissement d'une fonction pour un accroissement positif de la variable est de même signe que la dérivée. En d'autres termes :

Une fonction est croissante ou décroissante suivant que sa dérivée est positive ou négative. La réciproque est évidente.

9. *Maximum et minimum d'une fonction.* On dit qu'une fonction est *maximum* pour $x = a$ lorsque pour des valeurs voisines elle est moindre. Si pour des valeurs voisines de a, la fonction a une valeur plus grande, elle est *minimum* pour $x = a$.

Pour fixer les idées, proposons-nous de trouver les valeurs de x qui rendent y maximum. Soit $x = a$ l'une d'elles : pour $x = a - h$ la fonction y est croissante, donc y' est positif, pour $x = a + h$ elle est décroissante, donc y' est négatif. Ainsi la fonction y' change de signe quand x passe d'une valeur plus petite que a à une valeur supérieure à a ; si donc on suppose la fonction y continue, y' ne pourra changer de signe qu'en passant par zéro. Le même raisonnement s'applique à la recherche des minimums de la fonction.

Ainsi :

Les valeurs de la variable qui font prendre à une fonction une valeur maximum ou minimum annullent la dérivée.

C'est ce qui ressort immédiatement de la représentation graphique de la fonction et de la dérivée.

10. *Caractère du maximum et du minimum.* Pour que la fonction atteigne un maximum, il faut qu'elle croisse puis décroisse : la dérivée est donc d'abord positive puis négative, elle a par conséquent une marche décroissante, donc la dérivée seconde est négative. De même, la dérivée seconde est positive si la fonction passe par une valeur minimum. Réciproquement, lorsque pour une valeur a de x, qui annulle la dérivée d'une fonction, la dérivée seconde est négative, la fonction est maximum pour $x = a$; si la dérivée seconde est positive, la fonc-

tion prend une valeur minimum. Si la dérivée seconde est nulle on ne peut rien conclure. [1]

11. *Détermination de la dérivée d'une fonction.* La recherche directe de la dérivée d'une fonction quelconque serait un problème long et difficile dans la plupart des cas, mais elle est ramenée à des règles d'une application facile quand on a distingué dans la fonction les éléments dont elle se compose, et les opérations qui y sont indiquées.

On appelle *fonctions simples*, celles qui sont liées à la variable par une relation qui n'est pas susceptible de décomposition. Ce sont :

1° La fonction algébrique x; 2° les fonctions transcendantes $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, etc., $\log x$, a^x. [2]

On appelle *fonction composée* une fonction dans laquelle entrent plusieurs fonctions simples. Exemple :

$$y = x^2 - a \sin x.$$

Si la variable qui entre dans une fonction dépend elle-même d'une autre fonction, la fonction se nomme *une fonction de fonction*. Exemple :

$$y = u^2 + lu,$$

u étant lié à x par la relation

$$u = x + \frac{1}{x}.$$

Nous n'aurons guère à considérer que des fonctions que l'on peut mettre sous la forme $y = f(x)$. On les nomme fonctions *explicites* et on appelle *implicites* les fonctions dont la valeur ne peut être exprimée au moyen de la variable. Nous allons donner les règles à suivre pour trouver la dérivée des fonctions explicites, et les appliquer à quelques exemples.

1. Voir, pour plus de développements, le Traité de calcul différentiel de Duhamel.

2. Nous désignerons toujours par *log.* un logarithme vulgaire et par *l* un logarithme népérien.

Nous montrerons aussi comment on trouve la dérivée d'une fonction implicite.

12. *La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des diverses fonctions prises par rapport à la variable au moyen de laquelle elles sont immédiatement exprimées.*

Si l'on a par exemple $y = f(z), z = \varphi(u), u = \psi(x)$; pour avoir la dérivée de y par rapport à x, on prendra la dérivée de y par rapport à z, la dérivée de z par rapport à u, et enfin la dérivée de u par rapport à x, et on fera le produit de ces dérivées, c'est ce que l'on exprime, d'après les notations adoptées, par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Il faut bien remarquer que dans le second membre de l'expression, il n'y a aucune réduction à faire entre les facteurs, chacun des rapports écrits étant un symbole qui marque les opérations à effectuer.

13. *La dérivée d'une fonction composée est égale à la somme des dérivées de la fonction, prises successivement par rapport à chacune des variables qui y entrent.*

Si l'on a $y = f(u, v, w, ...)$; u, v, w étant des fonctions qui dépendent de x, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dy} + \ldots..$$

Chacun des termes qui composent le second membre est un produit de deux facteurs, d'après le théorème précédent, et si u, par exemple, ne dépend pas immédiatement de x, $\frac{du}{dx}$ sera aussi un produit de dérivées successives.

14. *La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées des termes qui la composent.*

Si

$$y = u + v - w,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

15. *La dérivée d'un produit est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs.*

Soit $y = Auvw$, A désignant un nombre;

$$\frac{dy}{dx} = Avw\frac{du}{dx} + Auw\frac{dv}{dx} + Auv\frac{dw}{dx}.$$

16. *La dérivée d'un quotient est égale à la dérivée du numérateur, multipliée par le dénominateur, moins la dérivée du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

Ainsi lorsque

$$y = \frac{u}{v},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

17. *La dérivée d'une puissance s'obtient en multipliant la puissance par l'exposant, diminuant cet exposant d'une unité et multipliant encore par la dérivée de la fonction soumise à l'exposant.*

Si $y = u^m$, m désignant un nombre quelconque positif ou négatif entier, ou fractionnaire,

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx},$$

en sorte que si l'on a à prendre la dérivée de $\sqrt[n]{u^m}$, on écrira l'expression sous la forme $u^{\frac{m}{n}}$ et on lui appliquera la règle précédente.

En particulier si

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}.$$

Cette expression se rencontrant souvent, il est bon d'ex-

primer la règle à suivre pour en prendre la dérivée et l'on voit que :

18. *La dérivée d'un radical* (carré) *est égale à la dérivée de la fonction soumise au radical, divisée par le double du radical.*

19. *Tableau des dérivées des fonctions simples.* A l'aide du tableau qui suit et des règles qui précèdent, il sera aisé de trouver la dérivée d'une fonction explicite quelconque.

y	$\frac{dy}{dx}$	y	$\frac{dy}{dx}$
1° x^m	mx^{m-1}	11° cosec x	$-\frac{\cot g\, x}{\sin x}$
2° a^x	$a^x\, la$		
3° e^x	e^x	12° arc sin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4° $\log x$	$\frac{1}{x}\log e$		
5° lx	$\frac{1}{x}$	13° arc cos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6° $\sin x$	$\cos x$	14° arc tg x	$\frac{1}{1+x^2}$
7° $\cos x$	$-\sin x$		
8° tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	15° arc cotg x	$-\frac{1}{1+x^2}$
9° cotg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	16° arc sec x	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
10° sec x	$\frac{\text{tg}\, x}{\cos x}$	17° arc cosec x	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

20. *Application des règles précédentes.* Proposons-nous de trouver la dérivée des fonctions suivantes :

Exemple I. Soit

$$y = \sin^m x.$$

Posons

$$u = \sin x.$$

d'où

$$y = u^m.$$

Prenant la dérivée de y par rapport à u et la dérivée de u par rapport à x, on a

$$\frac{dy}{du} = mu^{m-1}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x,$$

d'où § 12

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\cos x;$$

remplaçant u par sa valeur

$$\frac{dy}{dx} = m \overset{m-1}{\sin x} \cos x.$$

Exemple II. Soit encore

$y = \log \sin^4 (x^2 - 1)^2$	d'où $y = \log u$
Posons $u = \sin^4 (x^2 - 1)^2$	$u = v^4$
$v = \sin (x^2 - 1)^2$	$v = \sin w$
$w = (x^2 - 1)^2$	$w = t^2$
$t = x^2 - 1$	$t = x^2 - 1.$

Nous n'aurons qu'à faire le produit des dérivées des fonctions y, u, v, w, t, il viendra :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \log e. \ 4v^3. \ \cos w. \ 2t. \ 2x.$$

ou en remplaçant u, v, w, t en x et réduisant

$$\frac{dy}{dx} = 16 \log e \frac{x^3 - x}{\operatorname{tg} (x^2 - 1)^2}.$$

D'après ces exemples, on voit qu'on peut se dispenser d'introduire les variables u, v, w, t et prendre la dérivée de l'expression en regardant comme une seule variable la quantité soumise à chaque signe de fonction. Ainsi, dans le dernier exemple, on a d'abord à prendre la dérivée d'un logarithme, puis il faut la multiplier par la dérivée de la quantité soumise au signe logarithme; cette quantité étant une fonction élevée à une puissance; on a en second lieu à prendre la dérivée d'une puissance et il faut la multiplier par la dérivée de la quantité soumise à l'exposant; cette quantité étant un sinus, on doit en troisième lieu prendre la dérivée d'un sinus, etc.... C'est ce qui est du reste exprimé dans la valeur de $\frac{dy}{dx}$, seulement on écrit

immédiatement les fonctions de x, représentées par u, v, w, t.

Exemple III. Prenons pour dernier exemple :

$$y = \frac{l\,(1 - x)}{x} - a^{mx} \sin^n px$$

posons pour l'explication

$$u = \frac{l\,(1 - x)}{x} \quad v = a^{mx} \quad w = \sin^n px$$

d'où

$$y = u - v.\,w$$

et d'après les règles §§ 13 et 15.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - w\,\frac{dv}{dx} - v\,\frac{dw}{dx};$$

mais d'après les §§ 12 et 16

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{x}{x-1} - l\,(1-x)\right)\frac{1}{x^2},$$

et d'après les §§ 12 et 17

$$\frac{dv}{dx} = ma^{mx}la, \quad \frac{dw}{dx} = np \sin^{n-1} px \cos px,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - x} - \frac{l\,(1-x)}{x^2} - m.la.\,a^{mx}\sin^n px - np\,a^{mx}\sin^{n-1} px \cos px,$$

On voit encore qu'il est inutile d'introduire les quantités u, v, w, et que l'on peut écrire immédiatement la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en effectuant immédiatement les calculs indiqués dans sa première expression, ce que l'on fera aisément après quelques exercices.

21. *Dérivée d'une fonction implicite.* Soit

$$f\,(x.\,y) = 0$$

la relation qui lie la fonction avec la variable.

Imaginons qu'on tire de cette équation la valeur d'y en fonction d'x et portons cette valeur dans l'équation $f\,(x.\,y) = 0$; on aura une identité. Or, quand une fonction est identique-

ment nulle, sa dérivée est zéro. Si donc on prend la dérivée en considérant y comme une fonction de x, on aura, d'après la règle donnée pour prendre la dérivée d'une fonction composée,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui fait connaître la dérivée cherchée $\frac{dy}{dx}$.

Le même raisonnement appliqué à une équation

$$f(x \,.\, y) = \varphi(x \,.\, y)$$

montre qu'on déterminera la dérivée par la relation

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

obtenue en égalant les dérivées des deux membres.

Exemple. Soit donnée la relation

$$y^3 + 2\,x^3 = x^2 y + 3\,y^2 x - x^2$$

on aura

$$6\,x^2 + 3\,y^2 \frac{dy}{dx} = 2xy + 3\,y^2 - 2x + (x^2 + 6\,xy)\frac{dy}{dx}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,xy + 3\,y^2 - 6\,x^2 - 2\,x}{3\,y^2 - 6\,xy - x^2}$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

I.

Division des fonctions en deux classes.

22. On distingue ordinairement deux sortes de fonctions: 1° les fonctions algébriques, 2° les fonctions transcendantes.

On appelle fonctions algébriques, des fonctions renfermant

un nombre limité de termes, composées avec Ax^m au moyen des signes de l'algèbre, m désignant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, variable d'un terme à l'autre ainsi que le coefficient A. On les subdivise en fonctions rationnelles, qui ne renferment aucun radical et dans lesquelles l'exposant m est entier, et en fonctions irrationnelles. Enfin, il y a lieu de séparer les fonctions rationnelles en fonctions entières, qui nê renferment pas x en dénominateur et en fonctions fractionnaires.

Toutes les autres fonctions sont dites transcendantes. Leur liaison à la variable est exprimée par un signe particulier; ce sont les fonctions simples a^x, $\log x$, $\sin x$...., $\arc\sin x$.... etc., dont nous supposerons les définitions et les propriétés connues, et les fonctions renfermant une ou plusieurs de ces fonctions.

Nous nous bornerons à étudier les propriétés des fonctions entières, ce qui suffit au but de notre travail, et nous ajouterons quelques mots sur les fonctions algébriques fractionnaires et les fonctions algébriques rationnelles, soumises à des radicaux du second degré.

II.

Fonctions algébriques entières.

23. La fonction la plus simple de cette espèce est

$$y = Ax^m$$

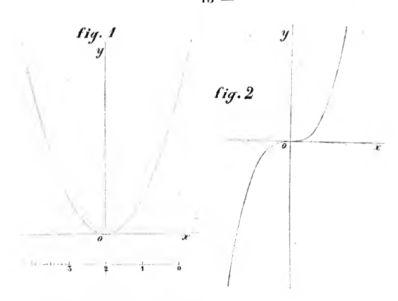
m désignant un nombre entier.

1° Cette fonction est continue, car sa dérivée

$$y' = mAx^{m-1}$$

reste finie avec x.

2° Elle varie de 0 à $+\infty$ quand x varie de 0 à $\mp\infty$, si m est pair, et de 0 à $\pm\infty$ quand x varie de 0 à $\pm\infty$, si m est impair, en sorte qu'elle est représentée graphiquement par une courbe dont la forme générale est celle de la figure (1) si m est pair, et celle de la figure (2) si m est impair.



On en conclut aisément que :

3° Quand x varie de 0 à l'infini, le rapport $\frac{Ax^m}{A'x^{m'}}$ varie de 0 à l'infini, si $m > m'$, reste constant, si $m = m'$ et varie de l'infini à zéro si m est $< m'$.

Il résulte de ces théorèmes que la fonction

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

est une fonction continue.

Si elle est ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable, le rapport du premier terme à l'un quelconque des autres, pourra dépasser toute grandeur quand on fera croître x (§ 23), en sorte que pour une valeur assez grande de x, le premier terme sera plus grand que la somme de tous les autres. Donc :

24. *Une fonction entière de* x *est une fonction continue et il existe toujours une valeur positive de* x *à partir de laquelle le signe de la fonction reste celui de son premier terme. Il existe aussi une valeur négative de* x, *au-dessous de laquelle le signe de la fonction est celui que prend son premier terme.*

D'après cela :

Une fonction entière de degré pair prendra le même signe pour des valeurs absolues de x assez grandes, l'une positive, l'autre négative.

Une fonction entière de degré impair prendra des signes contraires dans les mêmes circonstances.

En résumé :

La fonction ne peut plus changer de signe en dehors de deux limites. Ces limites ne peuvent pas être déterminées *a priori* d'une manière exacte; mais on peut formuler une règle à l'aide de laquelle on trouvera des nombres supérieurs à leur valeur absolue et nous la donnerons plus loin (§ 62).

Dans l'intervalle des limites la fonction peut changer de signe un certain nombre de fois. Ce nombre est lié, comme nous allons le voir au degré de la fonction; mais avant d'établir cette dépendance, observons qu'il résulte de la continuité de la fonction les propriétés qui suivent :

25. *Une fonction qui change de signe quand la variable passe d'une valeur* α *à une autre* β*, s'annulle dans l'intervalle, et si elle s'annulle plus d'une fois, elle s'annulle un nombre impair de fois.*

Et réciproquement ;

Une fonction qui passe un nombre impair de fois par zéro entre deux valeurs, α, β *de la variable, prend des signes contraires pour ces deux valeurs.*

De même :

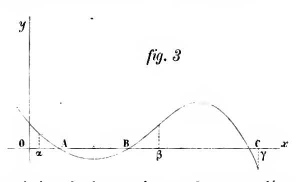
26. *Une fonction qui prend le même signe pour deux valeurs* α *et* β *de la variable, ne s'annulle pas dans l'intervalle ou s'annulle un nombre pair de fois.*

Et réciproquement :

Une fonction qui s'annulle un nombre pair de fois entre deux valeurs α, β *de la variable, prend le même signe pour ces deux valeurs.*

27. *Remarque.* La différence de deux ou de plusieurs valeurs pour lesquelles la fonction s'annulle peut être zéro, et c'est à

la condition que ces valeurs seront considérées comme distinctes que les théorèmes précédents sont généraux.



C'est ainsi que les deux nombres α et β sont regardés comme comprenant deux valeurs 0A, 0B, pour lesquelles la fonction s'annulle, lors même que la différence AB est nulle. De même les nombres α et γ doivent être considérés comme renfermant trois valeurs 0A, 0B, 0C, qui annullent la fonction même quand les différences AB, AC sont nulles.

Si nous comparons la marche de la fonction à celle de sa dérivée, il est aisé de voir que les changements de signe de la fonction sont liés à ceux de la dérivée par le théorème suivant :

28. *Si une fonction change* n *fois de signe, sa dérivée en change* n — 1 *fois au moins.*

En effet, si une fonction change deux fois de signe, elle passe par exemple de — à +, puis de + à —, elle est croissante, puis décroissante, donc sa dérivée change de signe (§ 9) et par conséquent s'annulle au moins une fois (§ 26), ou un nombre impair de fois. Il suit de là et de la remarque précédente que :

Si la différence de deux valeurs successives de la variable qui rendent une fonction nulle, est zéro, la dérivée est nulle pour cette même valeur, puisqu'elle doit s'annuler dans l'intervalle de deux valeurs quelconques. Et généralement :

Si les intervalles entre n, valeurs de x qui annullent la fonction, deviennent zéro, les intervalles de n — 1, valeurs qui annu-

lent la dérivée, deviennent aussi zéro. Ces derniers théorèmes recevront plus loin une forme plus simple et d'autres développements, mais ce sont des conséquences si immédiates de la propriété précédente, que nous n'avons pas cru pouvoir les omettre ici. Revenons à notre but initial qui est d'établir que :

29. *Une fonction algébrique de degré* m *ne peut s'annuler plus de* m *fois.*

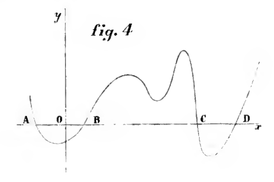
En effet : nous venons de voir que si une fonction change deux fois de signe, sa dérivée en change au moins une fois; si elle change trois fois de signe, la dérivée en change au moins deux fois, et ainsi de suite.

Cela posé, une fonction du premier degré ne peut s'annuler qu'une fois, car si elle s'annullait deux fois, elle changerait deux fois de signe (§ 26), la dérivée devrait s'annuler une fois (§ 27), ce qui est impossible, puisque cette dérivée est une constante.

Il suit immédiatement que :

Une fonction du second degré ne peut s'annuler trois fois, car sa dérivée, qui est du premier degré, devrait s'annuler deux fois, ce qui, nous venons de le voir, est impossible. Ce raisonnement continué conduit au théorème général que nous voulions démontrer.

D'après cela, une fonction du degré m sera représentée par une courbe qui coupera l'axe des x au plus en m points, A, B, C, D.....



Il est également évident qu'il n'existera pas toujours m valeur de x pour lesquelles la fonction de degré m s'annulle. On voit en effet que si l'on ajoutait à la fonction y, supposée de degré pair dans la figure, un nombre positif supérieur à sa plus grande valeur négative, la courbe qui la représente ne couperait plus l'axe $0x$; il n'existerait aucune valeur de x pour laquelle la fonction fut nulle.

Une fonction entière de x jouit encore d'une propriété remarquable, définie par le théorème suivant.

30. *Si* a *annulle une fonction entière* X_m, X_m *est divisible par* $x - a$.

En effet, si on effectue la division, on obtiendra un polynome entier pour quotient et un reste numérique, en sorte qu'on aura quel que soit x.

$$X = (x - a)\, X_{m-1} + R$$

Mais pour $x = a$ le premier membre et le premier terme du second sont nuls, donc $R = 0$.

Réciproquement si la division de X_m par $x - a$ donne 0 pour reste, X_m sera nul pour $x = a$.

Cor. Soient $a, b, c .. k, l$, les n nombres qui annullent X_m on aura :

$$X_m = (x - a)\, X_{m-1}$$
$$X_{m-1} = (x - b)\, X_{m-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{m-n+1} = (x - l)\, X_{m-n}$$

et en multipliant membre à membre.

$$X_m = (x - a)\,(x - b) \ldots\, (x - k)\,(x - l)\, X_{m-n}$$

La fonction X_{m-n} sera de degré pair (§ 24), puisqu'elle ne peut s'annuler pour aucune valeur de la variable et son dernier terme aura même signe que le premier. Si on met en facteur le coefficient du premier terme, on voit que le second membre prendra la forme

$$A\,(x - a)\,(x - b) \ldots\, (x - l)\, \varphi\,(x).$$

La connaissance de cette propriété particulière aux fonctions entières, conduit au problème suivant :

31. *Trouver les facteurs du 1er degré communs à deux fonctions entières de* x, *ou le diviseur commun à ces deux fonctions.*

Pour trouver ce commun diviseur, on opère comme si l'on avait à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. On divise le polynome du plus haut degré par l'autre, jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré inférieur au diviseur; on divise de la même manière le diviseur par le reste et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on obtienne un reste nul, le dernier diviseur employé est le plus grand commun diviseur cherché.

La légitimité de ce procédé repose sur cette propriété, savoir: les facteurs du premier degré communs à deux fonctions entières, sont les mêmes que les facteurs du premier degré communs, à l'une d'elles prise comme diviseur et au reste obtenu en retranchant de l'autre prise comme dividende, le produit du diviseur par le quotient déjà obtenu.

Cette propriété pouvant s'appliquer pendant tout le cours d'une division, quel que soit le nombre des termes obtenus au quotient, il sera permis de multiplier tout dividende par un facteur numérique choisi pour faciliter les calculs en évitant les coefficients fractionnaires.

III.

Fonctions algébriques fractionnaires.

32. L'étude de ces fonctions se ramène immédiatement à celle des fonctions entières. Elles sont en effet de la forme

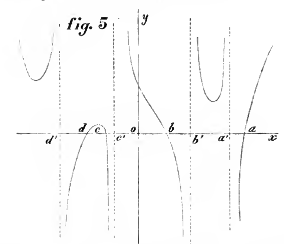
$$y = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1}\, x + A_m}{A'_0 x^{m'} + \dots \qquad + A'_{m-1}\, x + A'_m}$$

ce qu'on peut écrire (§ 30) comme il suit:

$$y = \frac{A\,(x-a)\,(x-b)\dots\,(x-l)}{A'\,(x-a')\,(x-b')\dots\,(x-l')}\frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)},$$

$\varphi\,(x)$ et $\psi\,(x)$ étant des fonctions qui ne changent pas de signe avec x, et les facteurs du premier degré communs aux deux termes étant supprimés. On voit alors que la fonction y sera nulle pour les valeurs a, b, c.... l et infinie pour les valeurs a', b', c'... l'; elle changera de signe toutes les fois que x pas-

sera par l'une de ces valeurs, en sorte qu'elle ne sera continue que pour les valeurs de x comprises entre deux valeurs successives qui la rendent infinie; d'ailleurs elle aura toujours une valeur réelle et une seule. Supposons, pour fixer les idées, que le numérateur renferme 4 facteurs du premier degré et le dénominateur 4, et que l'on ait $a > a' > b' > b > c' > c > d'$. Si A et A' sont en outre de même signe et si la différence $m - m'$ est positive on aura la figure suivante :



33. *Valeur de la fonction quand la variable devient infinie.* Quant à la valeur de la fonction pour de grandes valeurs de la variable, elle dépend de la différence $m - m'$ des degrés du numérateur et du dénominateur et, pour $x = \pm \infty$,

si $m - m' > 0$, la fonction sera infinie,

$m - m' = 0$, id. prendra la valeur $\frac{A}{A'}$,

$m - m' < 0$, id. sera nulle.

Pour le reconnaître il suffit de diviser haut et bas par x^m dans la première expression de y et de faire croître x indéfiniment.

On voit en même temps que le signe de y est celui de $\frac{A}{A'}x^{m-m'}$, en sorte que si la différence $m - m'$ est paire, y sera de même signe pour de grandes valeurs de x positives ou négatives, et pren-

dra des signes contraires dans les mêmes circonstances si la différence $m-m'$ est impaire.

IV.

Fonctions irrationnelles.

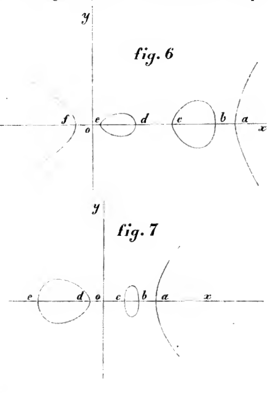
34. Soit la fonction irrationnelle entière du second degré.

$$y = \pm \sqrt{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m}$$

ou

$$y = \pm \sqrt{A_0 (x-a)(x-b)\ldots(x-l)\,\varphi(x)} \quad = \pm \sqrt{f(x)}.$$

La fonction $f(x)$ change de signe en passant par zéro, quand x a atteint une des valeurs a, b, c... en sorte que y est tantôt réel et tantôt imaginaire. Si, pour fixer les idées, on suppose $A_0 > 0$ et les quantités a, b,... l en nombre pair, on aura la figure 6 et, la figure 7, si elles sont en nombre impair.



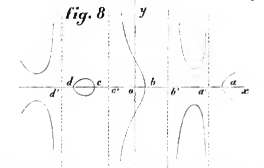
On voit aisément les changements qui surviendraient dans ces figures, si deux racines devenaient égales, ce qui revient à considérer le cas où l'on aurait une fonction irrationnelle de la forme

$$y = \pm \mathrm{F}(x) \sqrt{f(x)}$$

35. Soit en second lieu la fonction irrationnelle fractionnaire

$$y = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{A}\,(x-a) \ldots\ (x-l)\,\varphi(x)}{\mathrm{A}'\,(x-a') \ldots\ (x-l')\,\psi(x)}} = \pm \sqrt{f(x)},$$

D'après l'étude qui a été faite des fonctions fractionnaires, nous savons que $f(x)$ change de signe toutes les fois que x passe par une valeur $a, b, \ldots\ a', b' \ldots$ qui rend $f(x)$ nul ou infini. Supposons que la fonction $f(x)$ soit celle que nous avons représentée (§ 32), il est aisé de voir que la fonction $y = \pm \sqrt{f(x)}$ sera représentée par la figure suivante.



Je laisse au lecteur le soin d'examiner les divers cas de la question.

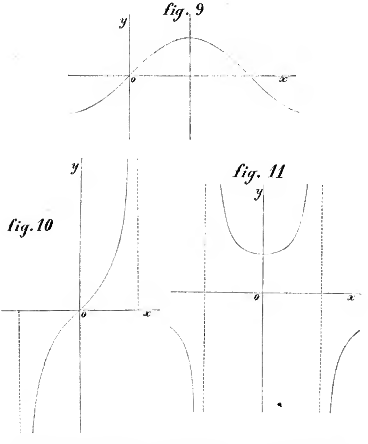
Lorsque l'indice du radical est supérieur à 2, la marche de la fonction est analogue à celle de la fonction fractionnaire rationnelle, dans le cas où l'indice du radical est impair. Elle présente les mêmes circonstances que celle que nous venons d'étudier lorsque l'indice du radical est pair. Le cadre de cet ouvrage, aussi bien que son but, m'oblige à arrêter ici les développements que l'on pourrait donner au sujet qui vient d'être abordé.

V.

Fonctions transcendantes.

36. *Fonctions trigonométriques.*

La marche des fonctions trigonométriques et de leurs fonctions inverses étant connue par la définition géométrique de ces fonctions, je me bornerai à en donner la représentation géométrique dans les figures qui suivent.



La figure 9 représente la fonction $y = \sin x$; la figure 10, $\operatorname{tg} x$, et la figure 11, $\sec x$. Les mêmes courbes représenteront

les fonctions $\cos x$, $\operatorname{cotg} x$ et $\operatorname{coséc} x$, en changeant les axes des coordonnées.

37. *Fonctions exponentielles et logarithmiques.* Les principales fonctions de ce genre que l'on rencontre sont les fonctions

$$e^x,\ e^x + e^{-x},\ e^x - e^{-x},\ \frac{1}{e^x + e^{-x}},\ \frac{1}{e^x - e^{-x}},\ lx.$$

Considérons la fonction

$$y = e^x$$

$e = 2{,}718281828\ldots$ quantité > 1.

Pour $x = 0$, $y = 1$; si x croît, y croît, car la dérivée $y' = e^x$ est constamment positive. Ainsi y croît toujours avec x et au delà de toute limite, puisque le rapport de l'accroissement de y à celui de x va toujours en augmentant. Si on donne à x des valeurs négatives à partir de zéro, y tend vers zéro, car pour $x = -x'$, $e^{-x'} = \frac{1}{e^{x'}}$, et par conséquent diminue de plus en plus, quand x' augmente au delà de toute limite. La fonction est représentée par la figure 12.

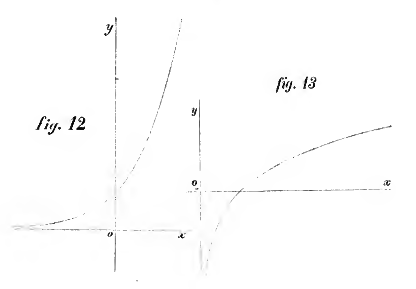


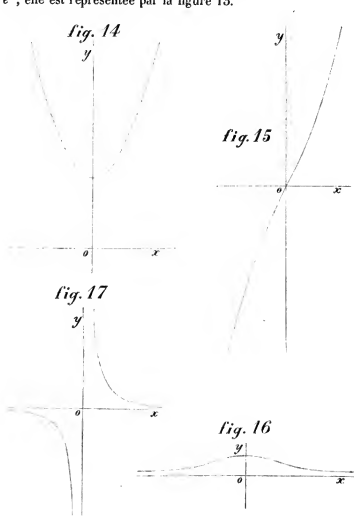
fig. 12

fig. 13

L'étude de cette fonction fait connaître les autres fonctions désignées plus haut. D'après cela les figures 14, 15, 16, 17 représentent les fonctions

$$e^x + e^{-x},\ e^x - e^{-x},\ \frac{1}{e^x + e^{-x}},\ \frac{1}{e^x - e^{-x}}.$$

Quant à la fonction $y = lx$, elle est précisément l'inverse de e^x, elle est représentée par la figure 13.



LIVRE II.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE I.

PRINCIPES DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

I.

Classification des équations numériques.

38. La classification des équations numériques résulte de la nature de la fonction représentée par le premier membre, le second membre étant zéro.

Lorsque le premier membre est une fonction algébrique à laquelle on peut donner la forme d'une fonction entière, en chassant les dénominateurs et faisant disparaître les radicaux, les propriétés générales caractéristiques de ces fonctions conduisent à des moyens spéciaux de découvrir, soit directement, soit indirectement, les valeurs de la variable pour lesquelles ces fonctions deviennent nulles. Ces valeurs sont ce que l'on nomme les *racines* de l'équation. Nous appellerons *équation algébrique* une équation dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de l'inconnue. La difficulté de résoudre l'équation étant jusqu'à un certain point liée à son degré, il y a lieu de diviser les équations algébriques en deux classes : les équations de degré inférieur au cinquième, dont les racines peuvent être calculées directement en fonction des coefficients, et les équations de degré supérieur au cinquième inclusivement, dont les racines ne peuvent être trouvées qu'indirectement, en s'appuyant sur l'étude faite plus haut des fonctions entières [1]

Lorsque le premier membre d'une équation renferme des

1. M. Hermite a montré qu'on peut résoudre directement les équations du 5e degré à l'aide des fonctions elliptiques.

fonctions transcendantes, l'équation est dite *transcendante*. On ne peut alors avoir recours qu'à un petit nombre de propriétés communes à toutes les fonctions continues pour rechercher ses racines. Il en est de même lorsque le premier membre est une fonction algébrique irrationnelle. De plus, tandis que le nombre des racines d'une équation algébrique est toujours limité, le nombre des racines d'une équation transcendante peut être infini; et s'il est limité, la liaison qui le fait dépendre du premier membre de l'équation est presque toujours impossible à découvrir.

La résolution de l'équation exige généralement une étude particulière, dont la difficulté dépend de la composition du premier membre.

Nous verrons cependant qu'on rencontre un grand nombre d'équations transcendantes aussi faciles à résoudre que les équations algébriques.

II.

Théorèmes généraux sur la recherche des racines d'une équation quelconque.

Les propositions précédentes (Chap. II), appliquées au premier membre d'une équation, lorsque la fonction qui le compose est continue, prennent la forme suivante:

39. *Si deux nombres* α, β, *substitués dans le premier membre d'une équation, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent une ou un nombre impair de racines.* Et réciproquement (§ 25).

Si deux nombres α, β, *substitués dans le premier membre d'une équation, donnent des résultats de même signe, ils comprennent un nombre pair de racines ou n'en comprennent aucune.* Et réciproquement (§ 26).

40. *Entre deux racines d'une équation, il y a au moins une racine de l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre* (§ 28).

41. *Si une équation a* n *racines égales, la dérivée aura* n — 1 *racines égales.*

Les propriétés précédentes sont indépendantes de la forme de l'équation. Celles qui suivent sont particulières aux équations algébriques.

III.

Propositions particulières aux équations algébriques.

42. *Toute équation de degré impair a au moins une racine de signe contraire à son dernier terme.*

43. *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

44. *Une équation algébrique ne peut avoir de racines en dehors de l'intervalle de deux nombres que l'on peut déterminer* a priori (§ 62) *et que l'on nomme limites des racines.*

45. *Une équation du degré* m *n'a pas plus de* m *racines* (§ 29).

De plus, la règle de Descartes assigne une limite au nombre des racines positives. Si on désigne par le nom de *variation* la succession de deux signes différents dans le premier membre d'une équation ordonnée, la règle consiste en ce que:

46. *Le nombre des racines positives d'une équation ne peut surpasser le nombre des variations que présente le premier membre, et la différence de ces deux nombres est paire.*

Il en résulte immédiatement (§ 57) que:

Le nombre des racines négatives ne peut dépasser le nombre des variations de l'équation obtenue en changeant x *en* — x, *et la différence est paire.* Ainsi l'équation

$$x^7 - 4x^4 + x^3 - 2 = 0$$

n'a pas plus de trois racines positives, et si elle en a moins de trois, elle n'en a qu'une. En changeant x en $-x$, on a

$$-x^7 - 4x^4 - x^3 - 2;$$

il n'y a aucune variation, l'équation proposée n'a pas de racines négatives.

CHAPITRE II.
DES RACINES.

I.
Des racines égales.

Nous avons déjà dit, § 27, que la différence entre deux ou plusieurs valeurs de la variable qui rendent nulle une fonction continue, peut être zéro et nous avons vu (§ 28), que ces valeurs rendaient alors nulle la dérivée de la fonction; nous allons donner quelques développements à ces propositions.

47. Soit une équation quelconque

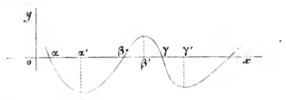
$$f(x) = 0$$

et a une racine de cette équation. Il s'agit de définir ce que l'on entend en disant que a est une racine double, triple, quadruple... ou que l'équation a deux, trois, quatre racines égales à a, et de donner des caractères algébriques qui permettent de reconnaître le degré de multiplicité de la racine a.

A cet effet considérons l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

dont les racines sont α, β, γ..... et représentons géométriquement le premier membre, ce qui donne, par exemple, la figure ci-dessous.



Nous savons (§ 37) qu'entre deux racines de

$$\varphi(x) = 0$$

il y a au moins une racine de la dérivée

$$\varphi'(x) = 0.$$

Soient α', β', γ'.... ces racines; imaginons qu'en faisant varier les divers paramètres qui entrent dans $\varphi(x)$, l'intervalle $\beta - \alpha$ diminue jusqu'à zéro, que $\varphi(x)$ devienne $f(x)$ et α égal à a; il y a entre α et β une racine α' de la dérivée, quelque petite que soit la différence $\beta - \alpha$ et par conséquent à la limite quand $\beta = \alpha = a$, α' devient aussi égal à a. On dit alors que l'équation a deux racines égales et l'on voit que :

Si a est racine double d'une équation $f(x) = 0$, on a en même temps

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0.$$

On verrait de la même manière que si les différences $\beta - \alpha$, $\gamma - \beta$ tendent vers zéro, $\beta' - \alpha'$ tend aussi vers zéro, et tandis que α, β, γ deviennent égaux à a, α' et β' deviennent aussi égaux à a. On dit alors que l'équation $f(x) = 0$ a une racine triple ou trois racines égales et l'on voit que :

Si a est racine triple d'une équation, $f(x) = 0$, on a en même temps

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0.$$

Généralement :

Si a est n fois racine d'une équation $f(x) = 0$, on a :

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0, \ldots \quad f^{n-1}(a) = 0$$

48. Réciproquement : si un nombre a annule une fonction et ses $n - 1$ premières dérivées, l'équation a n racines égales.

Dans le cas où le premier membre de l'équation est une fonction quelconque, cette réciproque constitue simplement une définition ou un caractère algébrique de la multiplicité de la racine qui satisfait à ces diverses conditions; mais si le premier membre de l'équation est une fonction algébrique de degré m, on peut aisément démontrer que, s'il y à n racines égales à a, il y en a au plus $m - n$ autres, c'est-à-dire que $(x - a)^n$ est facteur dans le premier membre.

En effet, nous avons vu (§ 30) qu'une fonction entière de x peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - k)(x - l)\,\varphi(x).$$

$a, b, c \ldots . l$ étant les nombres qui rendent $f(x)$ nul. Soit pour abréger,

$$f(x) = (x - a) f_1(x).$$

Prenons la dérivée, on aura identiquement

$$f'(x) = f_1(x) + (x - a) f_1'(x)$$

mais pour $x = a$ le premier membre est nul par hypothèse, donc le second doit l'être, ce qui donne

$$f_1(a) = 0$$

donc l'un des facteurs du premier degré qui entrent dans $f_1(x)$ doit être nul pour $x = a$, soit $a - b = 0$, ou $b = a$. On voit que l'équation proposée aura deux racines égales, on aura alors :

$$f(x) = (x - a)^2 f_2(x)$$

prenant deux fois la dérivée, il vient :

$$f'(x) = 2(x - a) f_2(x) + (x - a)^2 f'_2(x)$$
$$f''(x) = 2 f_2(x) + (x - a) \psi(x).$$

Faisons $x = a$, par hypothèse $f''(a) = 0$, donc

$$f_2(a) = 0$$

donc l'un des facteurs du premier degré qui entrent dans $f_2(x)$ doit être nul pour $x = a$, soit $a - c = 0$, ou $c - a$; on voit que l'équation proposée aura trois racines égales, on aura alors

$$f(x) = (x - a^3 f_3(x).$$

Continuant ainsi, on voit que si

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \ldots . \quad f^{n-1}(a) = 0$$
$$f(x) = (x - a)^n f_n(x). \qquad cqfd.$$

Cor. D'après cela, l'équation $f'(x) = 0$, aura $n - 1$ racines égales, donc

$$f'(x) = (x - a)^{n-1} \varphi(x).$$

49. *Comment on reconnaît qu'une équation algébrique a des racines égales.*

Nous venons de voir que si l'équation $f(x) = 0$ a n racines égales à a, $f'(x)$ a $n-1$ racines égales à a, de même si la proposée a p racines égales à b, la dérivée en aura $p-1$ égales à b, et ainsi de suite, donc les deux polynomes $f(x)$ et $f'(x)$ ont un commun diviseur qui est le produit des facteurs du premier degré qui entrent plusieurs fois dans $f(x)$ et pris une fois de moins. On reconnaîtra donc si une équation a des racines égales, en cherchant s'il y a un commun diviseur entre le premier membre et sa dérivée (§ 31).

50. *Comment on ramène une équation qui a des racines égales à une autre dont toutes les racines sont différentes.*

Soit

$$X = 0$$

l'équation proposée; D le diviseur commun entre X et sa dérivée X': il suit immédiatement de la composition du polynome D que le quotient $\frac{X}{D}$ est le produit des facteurs simples qui entrent dans X, donc l'équation

$$\frac{X}{D} = 0$$

a pour racines toutes les racines de la proposée et n'a plus de racines égales. La réduction que l'on vient d'opérer, suffit pour assurer la détermination des racines de l'équation $X = 0$, comme nous le verrons plus loin, mais comme en général il est utile d'abaisser le degré d'une équation pour en découvrir plus aisément les racines, nous allons montrer :

51. *Comment on peut obtenir isolément des équations qui fassent connaître les racines, de chaque degré de multiplicité, d'une équation qui a des racines égales.*

Nous venons de dire que D renferme les facteurs multiples qui se trouvent dans X et à un degré moindre d'une unité, en sorte que si l'équation proposée n'avait pas de racines dont le degré de multiplicité fût supérieur à 2, l'équation $D = 0$ n'aurait que des racines simples, racines doubles de $X = 0$, et le quotient $\frac{X}{D^2}$ donnerait les racines simples de la proposée.

Si l'équation $D = 0$ a des racines égales, on le reconnaîtra en opérant sur le polynome D comme on l'a fait sur X. Cette manière logique de procéder conduit aisément à la solution de la question proposée ; comme elle est développée dans tous les traités d'algèbre, nous allons en indiquer une qui est moins répandue.

Désignons généralement par X_h le produit des facteurs simples qui entrent h fois dans X, on aura

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_h^h \dots X_n^n$$

formons X', et cherchons le plus grand commun diviseur D entre X et X', divisons X et X' par D et soit

$$X = DQ \qquad X' = DQ_1$$

on obtiendra le produit X_h en cherchant le plus grand commun diviseur des deux polynomes

$$Q \text{ et } Q_1 - h\,Q'$$

Q' désignant la dérivée du polynome Q.

On a en effet (§ 15), en prenant la dérivée de X

$$X' = X_2 X_3^2 \dots X_n^{n-1} \, [X'_1 X_2 X_3 \dots X_n + 2 X_1 X'_2 X_3 \dots X_n + \dots$$
$$+ h X_1 X_2 \dots X'_h \dots X_n + \dots + n X_1 X_2 \dots X_n]$$

d'où

$$Q_1 = X'_1 X_2 X_3 \dots X_h \dots X_n + \dots + h X_1 X_2 \dots X'_h \dots X_n + \dots + n X_1 X_2 \dots X_h \dots X_n$$

d'ailleurs

$$Q = X_1 X_2 \dots X_h \dots X_n$$

$$hQ' = h X'_1 X_2 X_3 \dots X_h \dots X_n + \dots + h X_1 X_2 \dots X'_h \dots X_n + \dots + h X_1 X_2 \dots X_h \dots X'_n$$

Les deux seuls termes de Q_1 et de hQ' qui ne renferment pas X_h sont ceux qui renferment X'_h ; et comme, dans la différence $Q_1 - h\,Q'$, ils disparaissent, X_h se trouve facteur commun à tous les termes de la différence, et il est le seul : donc on aura le premier membre de l'équation

$$X_h = 0$$

en cherchant le plus grand commun diviseur de Q et de $Q_1 - h\,Q'$.

En particulier on aura une équation qui donnera les racines simples, en prenant le plus grand commun diviseur de Q et de $Q_1 - Q'$, soit X_1; l'équation

$$X_1 = 0$$

donnera les racines simples et l'équation

$$\frac{X}{X_1} = 0$$

les racines multiples.

52. Une équation de degré inférieur au sixième qui n'a pas de racines commensurables, n'a pas de racines égales incommensurables, si le premier membre n'est pas le carré d'un trinome du second degré.

En effet, les racines incommensurables sont données par des équations qui sont au moins du second degré, ainsi X_2 est au moins du second degré, donc si X n'est pas le carré de X_2 on a au moins

$$X = X_1\,X_2^2$$

et comme X_1 est aussi du second degré, sans quoi l'équation aurait des racines commensurables, on voit que X est au moins du sixième degré.

Ainsi, il n'y a pas lieu de chercher si une équation de degré inférieur au sixième a des racines égales incommensurables.

II.

Des racines imaginaires.

53. Nous avons considéré jusqu'à présent les nombres qui rendent nulle une fonction quelconque de x; mais certains symboles soumis à des règles conventionnelles, peuvent aussi rendre nulles certaines fonctions de x, on les nomme les racines *imaginaires* de l'équation obtenue en égalant cette fonction à zéro.

Les symboles dont il est ici question sont de la forme

$$a + b\sqrt{-1}$$

a et b étant des nombres; ces sortes de racines n'apparaissent pas dans la représentation géométrique du premier membre de l'équation, et comme elles ne représentent aucune grandeur, nous n'avons pas à nous en occuper. Ces expressions sont soumises aux règles du calcul des quantités que l'on nomme, par opposition, *réelles*, en convenant que le produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$ est égal à 1.

C'est ainsi que l'équation

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

qui n'a aucune racine réelle est satisfaite par

$$x = -3 \pm 2\sqrt{-1}.$$

De même l'équation

$$\sin\frac{\pi}{8+4x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} = 0$$

est vérifiée pour

$$x = \sqrt{-1}.$$

On ne peut rien dire de général sur les racines imaginaires d'une équation transcendante, mais si l'équation est algébrique, on démontre la proposition suivante:

54. *Toute équation de degré* m, *a* m *racines réelles ou imaginaires.*

En d'autres termes, si l'équation a n racines réelles, elle a $m-n$ racines imaginaires. Nous nous bornerons à faire voir que:

55. *Si une équation algébrique à coefficients réels a une racine de la forme* $a + b\sqrt{-1}$, *elle a aussi pour racine* $a - b\sqrt{-1}$.

Pour cela nous allons montrer que le premier membre est divisible par le produit $(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})$ ou par $(x-a)^2 + b^2$. En effet, soit $f(x)$ le premier membre de l'équation, effectuons la division indiquée, on aura

$$f(x) = [(x-a)^2 + b^2]\,Q + Mx + N,$$

M et N étant des nombres; mais si on fait $x = a + b\sqrt{-1}$

le premier membre est nul par hypothèse, le second est donc nul aussi, c'est-à-dire que l'on a

$$Ma + N + Mb\sqrt{-1} = 0$$

ou

$$Mb = 0 \quad Ma + N = 0$$

ce qui donne, puisque b n'est pas nul,

$$M = 0 \quad N = 0,$$

donc la division se fait exactement. c.q.f.d.

Cor. Le premier membre d'une équation algébrique qui n'a que des racines imaginaires, est le produit de facteurs réels du second degré de la forme $(x - a)^2 + b^2$.

III.

Transformations utiles dans la recherche des racines.

56. Les transformations dont nous voulons parler, ont pour but de ramener la recherche des racines d'une équation à celle des racines d'une autre équation, dont les racines sont plus faciles à découvrir, soit que sa forme se prête mieux au calcul, soit qu'on puisse lui appliquer des méthodes plus simples. Nous allons donner des règles pour faire sur les équations algébriques quelques transformations dont on a fréquemment besoin.

57. *Étant donnée une équation algébrique*

$$f(x) = A_1 x^m + A_0 x^{m-1} + \dots \quad + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

trouver une équation dont les racines soient égales et de signe contraire à celles de la proposée.

Soit $x = a$ une racine de $f(x) = 0$, remplaçons dans l'équation x par $-y$; $-y = a$ ou $y = -a$ satisfera à cette équation, donc l'équation

$$f(-y) = 0$$

sera l'équation cherchée. La substitution de $-y$ à x changera le signe de tous les termes de degré impair, et par conséquent celui du premier terme si l'équation est de degré impair; dans ce cas changeons le signe de tous les termes, les racines ne changeront pas, on en conclut cette règle:



Pour changer le signe de toutes les racines d'une équation, on change le signe de tous les termes qui ne sont pas de même parité que le degré de l'équation. L'équation obtenue est ce que l'on nomme la *transformée en* $-x$.

58. *Étant donnée une équation algebrique de degré* m, *la transformer en une autre dans laquelle le terme de degré* m—1 *soit nul.*

Soit l'équation donnée plus haut

$$f(x) = 0;$$

posons $x = y + h$, il viendra :

$$A_0 (y + h)^m + A_1 (y + h)^{m-1} + \ldots \quad = 0$$

Développant par la formule du binôme et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de y, il vient

$$A_0 y^m + (m A_0 h + A_1) y^{m-1} + \ldots \quad = 0.$$

Écrivons que le coefficient du second terme est nul, on a

$$mA_0 h + A_1 = 0, \quad h = -\frac{A_1}{mA_0}$$

et

$$x = y - \frac{mA_1}{A_0}$$

Donc :

Pour obtenir l'équation transformée, on divisera le premier membre par le coefficient du premier terme, et on remplacera x par y augmenté de la m^{me} partie du coefficient du second terme pris en signe contraire.

Pour effectuer la transformation, observons qu'en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de y le résultat de la subtitution de $y + h$ à la place de x, on a :

$$\left.\begin{array}{l} A_0 h^m \quad + m A_0 h^{m-1} \\ + A_1 h^{m-1} + (m-1) A_1 h^{m-2} \\ + A_2 h^{m-2} + (m-2) A_2 h^{m-3} \\ + \ldots \qquad + \ldots. \\ + A_{m-1} h + A_{m-1} \\ + A_m \end{array}\right| \begin{array}{l} y + m(m-1) A_0 h^{m-1} \\ + (m-1)(m-2) A_1 h^{m-1} \\ + \ldots. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{y^2}{1.2} + \ldots \;\; + A_0 y^m \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

et on reconnaît sans peine que ce résultat peut s'écrire comme il suit :

$$f(y+h) = f(h) + y f'(h) + \frac{y^2}{1.2} f''(h) + \frac{y^3}{1.2.3} f'''(h) + \dots$$
$$+ \frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(h) + \dots + \frac{y^m}{1.2..\, m} f^m(h).$$

59. Donc pour obtenir $f(y+h)$, on formera les dérivées successives de $f(x)$ et on y remplacera x par h, ainsi que dans $f(x)$; on divisera $f'(h)$ par 1, $f''(h)$ par 1.2, $f'''(h)$ par 1.2.3... etc..... et on aura ainsi les coefficients des puissances croissantes de y dans la fonction transformée, ainsi que le montre le développement précédent. Souvent on laisse subsister x dans l'équation, c'est-à-dire qu'on remplace x par $x + h$.

60. *Transformer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée, multipliées par un certain nombre* K.

A cet effet posons $y = Kx$

l'équation deviendra, en y remplaçant x par $\frac{y}{K}$

$$A_0 \frac{y^m}{K^m} + A_1 \frac{y^{m-1}}{K^{m-1}} + A_2 \frac{y^{m-2}}{K^{m-2}} + \dots \qquad + A_{m-1} \frac{y}{K} + A_m = 0$$

et il suffira de multiplier par K^m pour chasser tous les dénominateurs.

61. Le but ordinaire de cette transformation est de ramener l'équation proposée à une autre, dans laquelle le coefficient du premier terme soit l'unité, et dont tous les coefficients soient entiers, K est alors une indéterminée. On voit que le problème sera résolu en prenant $K = A_0$, car en multipliant par K^{m-1}, l'équation deviendra

$$y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 A_0 y^{m-2} + A_3 A_0^2 y^{m-3} + \dots$$
$$\dots + A_{m-1} A_0^{m-2} y + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Pour obtenir ce résultat, on voit qu'il suffit de multiplier les coefficients des puissances successives de la variable par les puissances successives du coefficient du premier terme, de façon que la somme des exposants de A_0 et x soit $m-1$.

IV.

Limites des racines.

On appelle *limite supérieure* des racines d'une équation $f(x) = 0$ un nombre au delà duquel il ne peut plus y avoir de racines de cette équation, et par conséquent un nombre tel que pour des valeurs de x plus grandes, le premier membre ne puisse ni s'annuler ni changer de signe.

On ne peut pas donner de règle qui permette de fixer *a priori* ces limites pour toute équation. Mais si l'équation est algébrique, on peut former immédiatement un nombre qui satisfait aux conditions précédentes et voici comment.

62. *Limite supérieure des racines positives.*

Étant donnée une équation algébrique dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, pour obtenir une limite supérieure des racines positives de cette équation, on augmente d'une unité le nombre trouvé, en extrayant, du plus grand coefficient négatif, une racine dont l'indice est égal à la différence entre le degré de l'équation et l'exposant du premier terme négatif.

Soit l'équation

$$x^8 + 2x^6 - 4x^5 + \frac{3}{2}x - 26 = 0$$

le plus grand coefficient négatif est 26; la différence entre le degré de l'équation et l'exposant du premier terme négatif est $8 - 5$ ou 3, donc

$$1 + \sqrt[3]{26} \text{ ou } 4$$

est une limite supérieure des racines positives.

De même dans l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 16x - 60 = 0$$

$1 + 60$ ou 61 est une limite supérieure des racines.

Pour démontrer cette règle, on supprime dans le premier membre de l'équation à partir du 1er terme, tous les termes positifs qui précèdent le premier terme négatif, et on remplace

les coefficients de tous les termes restants par le plus grand coefficient négatif, en rétablissant les termes qui manquent. Ces changements ont pour résultat de réduire la partie positive au premier terme et d'augmenter la partie soustractive, on a alors, en divisant par le coefficient de x^m:

$$x^m - N(x^n + x^{n-1} + \dots \quad + x + 1)$$

ou

$$x^m - N\,\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

ou encore

$$\frac{x^m(x-1) - Nx^{n+1} + N}{x - 1} = \frac{x^{n+1}(x^{m-n-1}(x-1) - N) + N}{x - 1}$$

Posons

$$x^{m-n-1}(x-1) - N > 0.$$

Cette condition sera satisfaite si l'on a, en remplaçant x par $x - 1$

$$(x-1)^{m-n} > N$$

ou

$$x > 1 + \sqrt[m-n]{N}.$$

Les fonctions précédentes seront aussi positives, et il en sera de même du premier membre de l'équation, qui restera positif pour toute valeur de x, supérieure à celle qui vient d'être donnée.

63. *Limite inférieure des racines négatives.*

La limite supérieure des racines de la transformée en $-x$, sera, en changeant son signe, la limite inférieure des racines de la proposée.

Si l'on applique cette règle aux deux équations ci-dessus, la transformée en $-x$ de la première étant

$$x^8 + 2x^6 + 4x^5 - \frac{3}{2}\,x - 26 = 0.$$

$-(1 + \sqrt[7]{26})$ ou -3 est une limite inférieure des racines négatives.

En sorte que toutes les racines de l'équation proposée sont comprises entre — 3 et 4.

La transformée en $-x$ de la seconde est

$$x^3 + 5x^2 + 16x + 60 = 0.$$

Elle n'a pas de racines positives, donc 0 est une limite inférieure de ses racines.

Remarque. On peut souvent écrire une équation sous une forme propre à mettre en évidence des limites plus resserrées des racines.

C'est ainsi qu'en écrivant l'équation précédente sous la forme

$$x^2(x-5) + 4\left(x - \frac{15}{4}\right) = 0$$

on voit que $x = 5$ est une limite supérieure des racines positives, car tout nombre plus grand que 5 rendra évidemment le premier membre positif.

LIVRE III.

RÉSOLUTION DES EQUATIONS NUMÉRIQUES.

CHAPITRE I.

DES ÉQUATIONS DONT LES RACINES PEUVENT ÊTRE CALCULÉES DIRECTEMENT.

64. Les équations qui jouissent de cette propriété sont en nombre très-limité. Ce sont les équations algébriques dont le degré ne dépasse pas le quatrième, les équations algébriques de degré supérieur qui se ramènent aux précédentes, et les équations transcendantes qui peuvent être mises sous la forme $T =$ constante, T désignant une fonction simple.

Nous allons passer en revue ces diverses sortes d'équations, en laissant de côté les équations du premier degré.

I.

Équations du second degré.

65. L'algèbre élémentaire donne pour exprimer les racines d'une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Lorsque les coefficients a, b, c n'ont qu'un petit nombre de chiffres, on peut effectuer le calcul par les opérations de l'arithmétique ; dans le cas contraire, il est préférable de recourir aux logarithmes.

Ce calcul n'ayant d'utilité pratique que dans le cas où les racines sont réelles, nous supposerons $b^2 - 4ac$ positif.

Nous distinguerons deux cas : 1° a et c sont de même signe ; 2° a et c sont de signes contraires, et comme a peut être toujours rendu positif en changeant tous les signes, s'il a le signe —, il suffira de considérer le cas ou c est positif et celui où c est négatif. Écrivons la valeur de x sous la forme

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right).$$

66. c positif. Posons

$$\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2} \quad (1)$$

il vient

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \pm \cos\varphi),$$

et, en séparant les racines,

$$x' = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

d'où, par l'élimination de b à l'aide de l'équation (1), on obtient :

$$x' = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

x' et x'' seront de même signe et de signe contraire à b.

67. *Règle pratique.* Étant donnée l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on déterminera l'angle φ par la formule

$$\lg \sin \varphi = \frac{1}{2}(\lg c + \lg a) + 0{,}3010300 - \lg b$$

et on aura en valeur absolue

$$\lg x' = \frac{1}{2}(\lg c - \lg a) + \lg \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$\lg x'' = \frac{1}{2}(\lg c - \lg a) + \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \text{ou} \quad x'' = -\frac{b}{a} - x'.$$

68. 2° c négatif. Mettons son signe en évidence et posons

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4ac}{b^2},$$

il vient, par un calcul semblable au précédent,

$$x' = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}, \qquad x'' = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

x' et x'' sont de signes contraires et la plus petite est de même signe que b.

69. *Règle pratique.* Étant donnée l'équation

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

on déterminera l'angle φ par la formule

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}(\lg c + \lg a) + 0{,}3010300 - \lg b$$

et on aura en valeur absolue

$$\lg x' = \frac{1}{2}(\lg c - \lg a) + \lg \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{et } \lg x'' = \frac{1}{2}(\lg c - \lg a) + \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \text{ou} \quad x'' = -\frac{b}{a} - x'.$$

70. *Exemple.* L'un des côtés d'un rectangle est de $1^m{,}35$; sur l'autre côté on décrit une demi-circonférence, extérieure au rectangle, quel doit être le rayon pour que la surface de la figure totale soit égale à celle d'un cercle de $0^m{,}75$ de rayon.

L'équation du problème est

$$\pi x^2 + 6{,}14\,x - 2\pi.\overline{0{,}75}^2 = 0.$$

On aura

$$\lg c = 0{,}5483034 \qquad \frac{1}{2}(lc + la) = 0{,}5227271$$

$$\lg a = 0{,}4971509 \qquad \frac{1}{2}(lc - la) = 0{,}0255762$$

$$\lg b = 0{,}7881684$$

d'où
$$\lg\text{tg}\,\varphi = 0{,}0355887$$

$$\varphi = 47^\circ\, 20'\, 51''$$

$$\frac{\varphi}{2} = 23^\circ\, 40'\, 25'',5$$

$$\lg\text{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \bar{1}{,}6418671$$

$$\lg x = \bar{1}{,}6674433$$

$$x = 0^{m},465.$$

71. *Cas particulier.* Lorsque dans l'équation du second degré a est très-petit relativement aux autres coefficients, l'une des racines est très-grande, l'autre est voisine de $-\frac{c}{b}$.

On calcule cette racine à l'aide de la formule suivante :

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} \ldots\ldots$$

Pour la démontrer, écrivons l'équation sous la forme

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

Si nous négligeons le terme $\frac{ax^2}{b}$, nous commettons une erreur qui est de l'ordre de a, c'est-à-dire du même degré de grandeur que ce coefficient, soit ε_1 cette erreur, on a une première valeur approchée.

$$x_1 = -\frac{c}{b} \quad \text{et} \quad x = -\frac{c}{b} + \varepsilon_1$$

est la valeur exacte ; substituons à la place de x cette valeur dans l'équation ci-dessus, il vient

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} \quad \text{et} \quad x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \varepsilon_2$$

est la valeur exacte, ε_1 désignant une grandeur de l'ordre a^2; substituons encore à la place de x cette valeur, nous aurons une troisième valeur approchée de x, donnée plus haut, et l'erreur commise sera de l'ordre de a^3; le sens de l'erreur sera déterminé par le signe du terme qui suit celui auquel on s'arrête.

II.

Équation du troisième degré.

72. L'équation du troisième degré peut aussi se résoudre directement, mais par des formules distinctes, selon que les racines de l'équation sont toutes réelles ou selon qu'une seule est réelle.

L'équation étant

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on commence par la transformer en une autre manquant de second terme. A cet effet on remplace x par $y - \frac{b}{3}$ (§ 58), et il vient :

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right) y + b\,\frac{2b^2 - 9c}{27} + d = 0,$$

équation que nous écrirons pour abréger

$$y^3 + py + q = 0,$$

et il est clair que, connaissant les racines de l'équation en y, on aura les valeurs de x en augmentant de $h = -\frac{b}{3}$ chacune des valeurs de y.

Pour déterminer ces valeurs, il y a divers cas à examiner, parce que les formules qui déterminent les racines changent avec le signe de p et les relations de grandeur entre p et q.

Mettons le signe de p en évidence, en sorte que p désignera un nombre, et pour abréger posons :

$$P = \frac{p^3}{27} \qquad Q = \frac{q^2}{4}.$$

Voici comment on opérera dans les divers cas :

73. *Résolution de l'équation.*

$$y^3 - py + q = 0.$$

Calculons

$$\lg Q = 2 \lg q - 0{,}6020600$$
$$\lg P = 3 \lg p - 1{,}4313638$$

et prenons la différence

$$\lg Q - \lg P.$$

1° Si cette différence est négative, calculons l'angle φ par la relation

$$\lg \cos \varphi = \frac{\lg Q - \lg P}{2},$$

et les valeurs absolues de y seront données par les formules

$$\lg y_1 = 0{,}3010300 + \frac{1}{6} \lg P + \lg \cos \frac{\varphi}{3}$$
$$\lg y_2 = 0{,}3010300 + \frac{1}{6} \lg P + \lg \cos \left(60 - \frac{\varphi}{3}\right)$$
$$\lg y_3 = 0{,}3010300 + \frac{1}{6} \lg P + \lg \cos \left(60 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

La première sera de signe contraire à q et les deux autres de même signe.

Par suite

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3}, \quad x_2 = y_2 - \frac{b}{3}, \quad x_3 = y_3 - \frac{b}{3}.$$

2° Si la différence $\lg Q - \lg P$ est positive, une seule des racines est réelle.

Calculons l'angle ω par la relation

$$\log \sin \omega = \frac{\lg P - \lg Q}{2},$$

puis l'angle φ d'après l'équation

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \lg \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

et on aura la valeur réelle de y par la formule

$$\lg y_1 = 0{,}3010300 + \frac{1}{6} \lg P - \lg \sin 2\varphi.$$

y_1 sera de signe contraire à q, et

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3}.$$

74. *Résolution de l'équation*

$$y^3 + py + q = 0,$$

dans laquelle p est positif, une seule racine est réelle et de signe contraire à q.

Calculons successivement les angles ω et φ par les relations

$$\lg \operatorname{tg} \omega = \frac{\lg P - \lg Q}{2}$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \quad \lg \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

et on aura pour y

$$\lg y_1 = 0{,}3010300 + \frac{1}{6} \lg P + \lg \operatorname{cotg} 2\varphi,$$

d'où

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3}.$$

75. *Exemples numériques.* Soit à résoudre l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 4 = 0,$$

posons $x = y - 1$, et il vient

$$y^3 - 10y + 5 = 0$$

$$\lg Q = 2 \lg 5 \;-0{,}6020600 = 0{,}7958800$$

$$\lg P = 3 \lg 10 - 1{,}4313638 = 1{,}5686362$$

$$\lg Q - \lg P = \bar{1}{,}2272438$$

L'équation a toutes ses racines réelles, puisque cette différence est négative.

Calculons l'angle φ, il vient

$$\lg \cos \varphi = 9{,}6136219$$

$$\varphi = 65^\circ\, 44'\, 43'',5$$

d'où

$$\frac{\varphi}{3} = 21^\circ\, 54'\, 54,''5$$

$$60^\circ - \frac{\varphi}{3} = 38^\circ\;\; 5'\;\; 5'',5$$

$$60^\circ + \frac{\varphi}{3} = 81^\circ\, 54'\, 54'',5$$

d'où

$$\lg y_1 = 0{,}5624694 + \lg\cos(21^\circ\,54'\,54'',5) = 0{,}5298945$$
$$\lg y_2 = 0{,}5624694 + \lg\cos(38^\circ\;\;5'\;\;5'',5) = 0{,}4584982$$
$$\lg y_3 = 0{,}5624694 + \lg\cos(81^\circ\,54'\,54'',5) = \bar{1},7105771$$
$$y_1 = -0{,}38762$$
$$y_2 = +2{,}87407$$
$$y_3 = +0{,}51355.$$

Comme vérification on doit avoir

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,\; y_1\, y_2\, y_3 = -5.$$

Retranchons l'unité à ces valeurs et nous aurons

$$x_1 = -4{,}38762$$
$$x_2 = \quad 1{,}87407$$
$$x_3 = -0{,}48645.$$

Exemple II. Résoudre l'équation $x^3 + x + 1 = 0$.

L'équation manque de second terme, le coefficient de x est positif, on prendra donc

$$\lg \mathrm{P} = -1{,}4313638$$
$$\lg \mathrm{Q} = -0{,}6020600$$

d'où
$$\lg\operatorname{tg}\omega = -0{,}4146519 = \bar{1},5853481$$
$$\omega = 21^\circ\;\;3'\;\;6'',2$$
$$\frac{\omega}{2} = 10^\circ\,31'\,33'',1$$
$$\lg\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}\lg\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \bar{1},7563532$$
$$\varphi = 29^\circ\,42'\,37,''1$$
$$2\varphi = 59^\circ\,25'\,14'',2$$
$$\lg x = 0{,}3010300 - 0{,}2385606 + \lg\operatorname{ctg} 2\varphi$$
$$= \bar{1},8339929$$
$$x = -0{,}682328.$$

77. *Démonstration des formules précédentes.*

Démontrons maintenant les formules qui viennent d'être données.

Soit l'équation

$$(1)\quad y^3 - py + q = 0.$$

La trigonométrie nous montre que l'équation

$$(2) \qquad \cos^3 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4} \cos \varphi = 0$$

a pour racines

$$\cos \frac{\varphi}{3}, \ \cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right), \ \cos\left(240^\circ + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Si nous pouvons ramener l'équation proposée à cette forme, elle sera donc complétement résolue.

Pour cela posons $y = \lambda z$ et l'équation à résoudre sera

$$(3) \qquad z^3 - \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0;$$

elle sera identique avec (2) si l'on pose

$$\frac{p}{\lambda^2} = \frac{3}{4} \qquad \frac{q}{\lambda^3} = -\frac{\cos \varphi}{4},$$

ce qui donne pour λ deux valeurs.

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}},$$

d'où

$$\cos \varphi = \mp \frac{q}{\lambda^3}, \qquad \text{et } \cos^2 \varphi = \frac{\frac{q^2}{4}}{\frac{p^3}{27}},$$

valeur réelle si l'on a

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0, \text{ ou } Q - P < 0,$$

telle est la *condition de réalité* des racines de l'équation (1).

Supposons cette condition remplie, on pourra dès lors calculer φ et les trois racines de l'équation en z; la relation $y = \lambda z$ fera connaître les valeurs correspondantes de y.

En prenant la valeur de λ, qui est de signe contraire à q, $\cos \varphi$ sera positif, $\varphi < 90°$ et $\frac{\varphi}{3} < 30°$, donc les trois valeurs de z.

$$\cos \frac{\varphi}{3}, \qquad \cos\left(120 + \frac{\varphi}{3}\right), \qquad \cos\left(240 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

ou

$$\cos \frac{\varphi}{3}, \ -\cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right), \ -\cos\left(60 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

seront la première positive, les deux autres négatives, en sorte que le signe de λ ou de $-q$ déterminera le signe des valeurs correspondantes de y.

78. Si la différence $Q-P$ est positive, l'équation ne peut être résolue à l'aide de l'équation (2). Voici comment on arrive au mode de calcul indiqué :

Soit toujours l'équation

$$y^3 - py + q = 0.$$

Nous nous appuyerons sur le lemne suivant :

Les racines cubiques imaginaires de l'unité sont le carré l'une de l'autre.

En effet, l'équation

$$y^3 - 1 = 0.$$

se décompose en

$$(y-1)(y^2+y+1) = 0.$$

Soient α, β les deux racines de l'équation

$$y^2 + y + 1 = 0.$$

On a

$$\alpha\beta = 1.$$

D'ailleurs, $\alpha^3 = 1$ et $\beta^3 = 1$, car α et β sont racines de $y^3 - 1 = 0$. Donc

$$\alpha = \beta^2 \text{ et } \beta = \alpha^2.$$

Revenons à l'équation à résoudre et pour cela posons

$$y = \lambda\,(a \operatorname{tg}\varphi + b \operatorname{cotg}\varphi).$$

a et b étant tous deux égaux à 1, ou bien l'un étant α et l'autre α^2, élevons y au cube, il vient

$$y^3 = \lambda^3\,[\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi + 3\,(a \operatorname{tg}\varphi + b \operatorname{cotg}\varphi)]$$

ou

$$y^3 - 3\lambda^2 y - \lambda^3\,(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi) = 0,$$

équation qui a pour racines les trois valeurs que prend y pour

$$a = 1,\ b = 1;\ a = \alpha,\ b = \alpha^2;\ a = \alpha^2,\ b = \alpha,$$

identifions avec la proposée. Pour cela on doit avoir

$$3\lambda^2 = p,\ -\lambda^3\,(\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi) = q,$$

d'où l'on tire pour λ deux valeurs réelles,

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}, \text{ d'où } \operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{cotg}^3\varphi = \frac{\mp q}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Pour calculer l'angle φ, posons

$$\operatorname{tg}^3\varphi = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2},$$

il vient

$$\sin\omega = \mp\frac{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}{\frac{q}{2}},$$

équation qui donne pour ω une valeur réelle, puisque le second membre est plus petit que 1. Par suite la racine réelle de l'équation proposée est :

$$y = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi) = \pm\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}.$$

En prenant λ de signe contraire à q, $\frac{\omega}{2}$ sera plus petit que 90° et $\varphi < 90^\circ$, donc y sera de signe contraire à q.

Soit enfin l'équation

$$y^3 + py + q = 0.$$

On posera

$$y = \lambda\,(a\operatorname{tg}\varphi - b\operatorname{cotg}\varphi),$$

et, en répétant un calcul analogue au précédent, on arrivera aux formules données plus haut pour résoudre l'équation.

III.

Équation du 4e degré.

79. Soit l'équation du 4e degré

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Nous allons ramener sa résolution à celle de deux équations du 2e degré, qui dépendent d'une équation du 3e degré. A cet effet, cherchons à déterminer pour les coefficients p, q, p', q'

des valeurs qui rendent le premier nombre identique avec le produit

$$(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Effectuons ce produit, on obtient:

$$x^4 + (p + p')x^3 + (q + q' + pp')x^2 + (pq' + qp')x + qq'.$$

Ce polynome sera identique avec le polynome donné si l'on a

$$p + p' = b \qquad q + q' = \alpha$$
$$pp' = c - \alpha \qquad qq' = e$$
$$pq' + qp' = d.$$

α désignant une indéterminée auxiliaire, les quatre premières relations donnent p, p', q, q',

$$p = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha} \qquad q = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e}$$
$$p' = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha} \qquad q' - \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e}$$

Portant ces valeurs dans la cinquième, il vient, pour déterminer α, l'équation

$$4\left(\frac{\alpha^2}{4} - e\right)\left(\frac{b^2}{4} - c + \alpha\right) - \left(d - \frac{b\alpha}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette condition montre que les deux facteurs de son premier terme sont de même signe. Si on y donne à α la plus grande des deux valeurs,

$$c - \frac{b^2}{4} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{e},$$

qui rendent ce terme nul, le résultat de la substitution est négatif; d'ailleurs, en effectuant les calculs et ordonnant l'équation précédente, elle devient

$$\alpha^3 - c\alpha^2 + (bd - 4e)\alpha + 4ec - eb^2 - d^2 = 0.$$

On voit que le premier terme est positif, donc elle a une racine réelle qui est supérieure à la plus grande de celles que nous venons de considérer; à cette valeur correspondent, par conséquent, pour p, p', q, q' des valeurs réelles, ce qui ra-



mène la résolution de l'équation proposée à celle des deux équations du second degré

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0.$$

Pour former ces équations, on remarquera que d'après la relation

$$\pm 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - e} \quad \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + \alpha} = d - \frac{b\alpha}{2}$$

le signe du second membre fera reconnaître si les deux radicaux sont de même signe ou de signe contraire, et, par conséquent, si à la valeur p correspond dans l'équation du second degré la valeur q ou q'.

On arrive identiquement aux mêmes calculs, en considérant l'équation proposée comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations

$$y^2 + bxy + cx^2 + dx + e = 0$$

et

$$y - x^2 = 0$$

qui représentent chacune une courbe du second degré. La question est alors de trouver les coordonnées des points communs à ces deux courbes. Nous allons donner tout à l'heure la solution générale de ce problème ; mais avant de nous occuper de cette question, nous appliquerons à un exemple le calcul qui vient d'être exposé.

80. *Exemple.* Soit donnée l'équation

$$4x^4 + 8x^3 - 1 = 0,$$

on a alors

$$b = 2,\ c = 0,\ d = 0,\ e = -\frac{1}{4}$$

et l'équation en α est

$$\alpha^3 + \alpha + 1 = 0;$$

elle a pour racine

$$-0{,}682328 \ (\S\ 76),$$

d'où

$$p, p' = 1 \pm \sqrt{0{,}317672} \quad = 1 \pm 0{,}563624$$

$$q, q' = -0{,}341164 \pm \sqrt{0{,}366393} = -0{,}341164 \pm 0{,}605303.$$

La fonction $d - \frac{b\alpha}{2}$ étant positive, les deux radicaux doivent être pris avec le même signe, et l'on a à résoudre les équations du second degré

$$x^2 + 1{,}563624\ x + 0{,}264139 = 0$$
$$x^2 + 0{,}436376\ x - 0{,}946467 = 0.$$

On suivra pour cela la méthode expliquée (§ 69).

La première de ces équations a ses racines imaginaires, les racines de la seconde sont

$$x' = \quad 0{,}778845$$
$$x'' = -1{,}215221.$$

IV.

Équations du second degré à deux inconnues.

81. Proposons-nous de calculer les valeurs d'x et d'y qui satisfont aux deux équations :

$$(1)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$
$$(2)\quad a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + e'x + f' = 0.$$

Si on multiplie la première par a', la seconde par a, on obtient par soustraction une équation du premier degré en y, d'où l'on tire y. Cette valeur, portée dans l'une des proposées, conduit à une équation du 4e degré en x, qui a quatre racines réelles, ou 2, ou 0, ce qui revient à dire que les courbes du second degré (1) et (2) ont quatre points communs, ou deux, ou ne se coupent pas.

Nommons P, Q, R, S, ces quatre points réels ou imaginaires.

Si les quatre points sont réels, on peut tracer par ces quatre points trois couples de droites (PQ, RS), (PR, QS), (PS, QR).

Si deux d'entre eux R, S sont imaginaires, on pourra tracer le seul couple (PQ, RS), la droite RS passant par deux points dont les coordonnées sont imaginaires conjuguées, la droite PQ par les deux points réels.

Si les quatre points sont imaginaires, les deux courbes ont encore un couple de sécantes communes, passant par les points imaginaires conjugués.

Or, nous allons précisément nous proposer de déterminer ces couples de sécantes communes. L'équation de chacune d'elles étant du premier degré, en les combinant entre elles, on n'aura à résoudre que des équations du premier degré s'il y a plusieurs couples de sécantes; s'il n'y a qu'un couple, l'une d'elles, combinée avec l'une des équations (1) et (2), fera connaître les deux points communs aux deux courbes.

La détermination de ces sécantes dépend d'une équation du troisième degré. En effet, multiplions l'équation (2) par un paramètre arbitraire λ et ajoutons, il vient

$$(3) \quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

en posant pour abréger

$$A = a + a'\lambda, \; B = b + b'\lambda, \text{ etc.}$$

L'équation (3) représente une courbe du second degré, passant par les quatre points P, Q, R, S; cherchons à déterminer λ par la condition que cette courbe se compose de deux droites. Pour cela résolvons par rapport à y.

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}$$

et exprimons que le radical est un carré parfait, ce qui donne

$$AE^2 + CD^2 - BDE + (B^2 - 4AC)F = 0.$$

Remplaçant A, B,.... par leur valeur, on obtient une équation du troisième degré en λ, qui a toujours une racine réelle.

Il ne suffit pas qu'une valeur de λ soit réelle pour qu'elle donne des sécantes réelles.

En effet, l'équation d'un couple de sécantes est :

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\left(x + \frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}\right);$$

il faut, en outre, que cette racine rende positive la différence $B^2 - 4AC$, et comme il y en a toujours une qui jouit de cette propriété, on voit que :

1° Si l'équation en λ a ses trois racines réelles et si deux d'entre elles rendent $B^2 - 4AC$ positif, il y a deux couples de sécantes communes, et par conséquent trois; les courbes se coupent en quatre points.

2° Si dans la première hypothèse une seule racine rend $B^2 - 4AC$ positif, il n'y a qu'un couple de sécantes réelles, mais aucune ne rencontre la courbe.

3° Si l'équation en λ n'a qu'une racine réelle, les courbes ne peuvent se couper en plus de deux points, et se couperont en deux points. C'est ce que M. Transon a fait voir en supposant les deux courbes rapportées aux deux sécantes prises comme axes de coordonnées, et appliquant à leurs équations, qui ne diffèrent alors que par le coefficient de xy, la méthode exposée plus haut.

82. Pour montrer sur un exemple l'application de cette méthode, soit à trouver les valeurs d'x et d'y qui satisfont aux deux équations :

$$y^2 + x^2 - 2x - y - 1 = 0$$
$$xy - 4x - 2y = 0.$$

Multiplions la seconde par λ et ajoutons membre à membre, il vient

$$y^2 + \lambda xy + x^2 - 2(1 + 2\lambda)x - (1 + 2\lambda)y - 1 = 0.$$

Résolvons par rapport à y, on a

$$y = \frac{-\lambda x + 1 + 2\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - 4)x^2 + 2(1 - \lambda)(1 + 2\lambda)x + (1 + 2\lambda)^2 + 4}.$$

Écrivons que le trinôme sous le radical est un carré parfait, on a

$$(1 + 2\lambda)^2 (5 - 2\lambda) = \lambda^2 - 4$$

ou

$$8\lambda^3 - 11\lambda^2 - 18\lambda - 9 = 0,$$

équation qui a une racine positive égale à 2,470217 et pour laquelle on a $\lambda^2 - 4 > 0$.

D'ailleurs, les équations de sécantes peuvent s'écrire :

$$2y+(\lambda\pm(1+2\lambda)\sqrt{5-2\lambda})x-\left(1+2\lambda\mp\frac{4-\lambda}{\sqrt{5-2\lambda}}\right)=0;$$

en les joignant successivement à l'une des équations du second degré, on obtient par l'élimination de y deux équations du second degré en x, dont l'une :

$$1,960018x^2+0,243787x-0,327645=0$$

a ses racines réelles et donne

$$x'=\quad 0,351370 \qquad x''=-0,475750$$

d'où

$$y'=-0,852512 \qquad y''=\quad 0,768656;$$

l'autre a ses racines imaginaires, en sorte que les deux courbes proposées ne se coupent qu'en deux points (x', y'), (x'', y'').

Remarquons encore que, dans certains cas particuliers, il pourra arriver, étant données deux équations du second degré à deux inconnues, que l'élimination de l'une des inconnues conduise à une équation bicarrée ou à une équation du troisième degré, que l'on résoudra alors directement. C'est ce qui aura lieu si l'un des points d'intersection des deux courbes est à l'infini. Par exemple, les deux courbes

$$y^2+3x-4y-2=0 \quad \text{et} \quad xy-x-y+2=0$$

se coupent en des points dont les abscisses sont déterminées par l'équation du troisième degré

$$3x^3-11x^2+19x-12=0.$$

V.

Équations de degré supérieur au quatrième.

83. Une équation algébrique de degré supérieur au quatrième ne peut en général être résolue directement. Sont exceptées seulement celles qui par leur forme spéciale peuvent se ramener aux cas examinés.

Nous n'entrerons dans aucune considération sur les équations susceptibles d'abaissement. Nous ferons seulement remarquer que les équations comprises dans les formes suivantes peuvent être résolues directement, savoir :

1° $$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0,$$

z désignant le polynome $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

2° $$A\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+B\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+C\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+D\left(x+\frac{1}{x}\right)+E=0,$$

en posant $x + \frac{1}{x} = z$.

Il est inutile de multiplier ces exemples, la résolution pratique des équations étant une question complètement résolue quant aux procédés qui peuvent conduire à la connaissance des valeurs des inconnues, comme nous le verrons plus loin.

VI.

Équations transcendantes.

84. Désignons par T une fonction transcendante pour laquelle on a des tables numériques ; une équation transcendante renfermant T pourra être résolue à l'aide de ces tables quand on pourra en tirer des valeurs de la forme $T = c^{te}$.

Exemple :

$$ae^x + be^{-x} = c.$$

On peut l'écrire

$$ae^{2x} - ce^x + b = 0,$$

et elle donne

$$e^x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

Lorsque l'équation ne renferme que des lignes trigonométriques, elle peut toujours être ramenée à la forme algébrique si le premier membre peut être exprimé rationnellement en sinus et cosinus, parce que le sinus et le cosinus d'un arc s'expriment tous deux rationnellement en fonction de la tangente d'un arc moitié. Dès lors on la résoudra comme une équation algébrique.

Si l'équation est homogène en sinus et cosinus et de degré m, en divisant par la m^e puissance du cosinus, on aura une équation où l'arc sera déterminé par sa tangente.

Généralement, pour déterminer l'inconnue, on exprimera

toutes les lignes trigonométriques en fonction d'une seule dont le choix dépendra de l'équation donnée.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DONT LES RACINES NE PEUVENT ÊTRE CALCULÉES DIRECTEMENT.

85. *Division de la question.* La résolution des équations dans les cas qui nous restent à examiner, s'exécute par des essais dirigés d'une manière convenable, et dont le résultat est d'obtenir la racine avec une approximation croissante quand elle ne peut être représentée par un nombre entier ou fractionnaire.

Nous donnerons des règles, d'une application générale, qui permettront de connaître exactement le nombre des racines d'une équation algébrique et de calculer chacune d'elles avec autant d'approximation qu'on voudra. Les procédés qui déterminent le nombre des racines d'une équation algébrique, ne s'appliquent pas à une équation transcendante, et chaque équation de cette espèce exige un examen spécial pour déterminer le nombre de ses racines quand ce nombre est fini, ou pour reconnaître qu'elle a une infinité de racines.

Dans la pratique la détermination du nombre des racines d'une équation est souvent peu nécessaire, soit que par la nature de la question on sache qu'une seule solution est possible, soit que les racines négatives ou les racines qui sont en dehors de certaines limites ne puissent répondre au problème proposé.

Cette recherche n'est point d'ailleurs utile pour le calcul d'une racine en particulier.

Dans tous les cas ce calcul se divise en deux :

1° Trouver deux nombres qui comprennent une racine et qui n'en comprennent qu'une, ce qu'on appelle plus brièvement séparer une racine. La séparation des racines fait connaître leur valeur avec une première approximation, et en formant la demi-somme des deux nombres qui comprennent cette

racine, elle se trouve connue avec une erreur moindre que leur demi-différence.

2° Resserrer l'intervalle des deux nombres qui comprennent la racine de façon que la différence des limites entre lesquelles elle est comprise soit aussi petite que l'on voudra. Ces calculs font l'objet de la seconde approximation.

86. *Différentes formes des racines.* Les racines d'une équation peuvent être des nombres commensurables entiers ou fractionnaires, et dans le cas d'une équation algébrique on les trouve par une méthode spéciale.

Lorsque les racines ne sont point commensurables, elles s'expriment par des nombres décimaux qui peuvent en différer aussi peu que l'on voudra; il arrive rarement, en effet, que ces nombres puissent être représentés par un symbole de grandeur incommensurable, tels que $\sqrt{a}$, lga...., et d'ailleurs lorsqu'il en est ainsi on ne le reconnaît généralement qu'*a posteriori*. Aussi ne recherche-t-on pas si des nombres commensurables soumis à divers symboles peuvent être racines d'une équation donnée, et on applique une méthode unique, indépendante de la forme possible d'une racine incommensurable, à toute équation algébrique ou transcendante, en y remplaçant les coefficients incommensurables qui peuvent s'y trouver par des valeurs approchées.

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

I.

Principes de cette recherche.

87. Une équation algébrique à coefficients entiers

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... \quad + Rx + S = 0$$

peut avoir des racines commensurables entières ou fraction-

naires; mais l'existence de ces sortes de racines étant très-rare dans les équations que l'on rencontre, nous indiquerons un moyen unique qui permettra de les découvrir toutes en même temps en ramenant l'équation proposée à une autre qui n'ait plus que des racines entières. Énonçons d'abord une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire un nombre fractionnaire pour qu'il puisse être une racine de l'équation proposée.

88. *Pour que* $\frac{a}{b}$ *soit racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, il faut que* a *soit un diviseur du dernier terme et* b *un diviseur du premier coefficient.*

En effet, si $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation (1), en faisant $x = \frac{a}{b}$, on doit avoir zéro, condition que l'on peut écrire comme il suit :

$$\frac{A\,a^m}{b} = \text{un nombre entier}$$

$$\frac{S\,b^m}{a} = \qquad \textit{idem}$$

ce qui établit la proposition énoncée.

Il en résulte que si $A = 1$, on doit avoir $b = 1$; donc :

89. *Une équation algébrique à coefficients entiers dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, ne peut avoir de racines fractionnaires.*

Or, nous avons vu (§ 61) comment une équation dans laquelle le coefficient du premier terme n'est pas l'unité peut être ramené à une autre dans laquelle ce coefficient soit l'unité; il suffit pour cela de remplacer x par $\frac{y}{A}$ et de multiplier le premier membre par A^{m-1}, et l'équation obtenue

$$y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots \qquad + A_{m-1}\,y + A_m = 0$$

n'a plus de racines commensurables fractionnaires.

La recherche des racines commensurables se trouve ainsi ramenée à celle des racines entières.

90. *Recherche des racines entières.* Soit a une racine, on

sait que le premier membre de l'équation est divisible par $y - a$, en sorte qu'il peut se mettre sous la forme

$$(y-a)(y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + \ldots + B_{m-2}\, y + B_{m-1}).$$

Écrivons que les deux expressions du premier membre sont identiques, il vient :

$$A_m = - B_{m-1}\, a \qquad \text{ou} \qquad \frac{A_m}{a} = - B_{m-1}$$

$$A_{m-1} = - B_{m-2}\, a + B_{m-1} \qquad \frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a} = - B_{m-2}$$

$$A_{m-2} = - B_{m-3}\, a + B_{m-2} \qquad \frac{A_{m-2} - B_{m-2}}{a} = - B_{m-3}$$

. . . .

$$A_1 = - B_1 a + B_2 \qquad \frac{A_2 - B_2}{a} = - B_1$$

$$A_2 = - a + B_1 \qquad \frac{A_1 - B_1}{a} = - 1$$

d'où résultent les conditions suivantes :

Étant donnée une équation algébrique à coefficients entiers et dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, pour qu'un nombre a soit racine de cette équation, il doit :

1° Diviser le dernier terme A_m;

2° Diviser la somme faite en ajoutant le quotient obtenu au coefficient A_{m-1} du terme précédent;

3° Diviser la somme faite en ajoutant le second quotient obtenu au coefficient A_{m-2}, et ainsi de suite.

Enfin, la dernière division doit donner pour quotient — 1.

Si a ne remplit pas toutes les conditions énoncées, il n'est point racine.

Si a remplit toutes ces conditions, il est racine, car elles établissent que le premier membre de l'équation est divisible par $y - a$. De plus, les quotients successifs trouvés, changés de signe, sont précisément les coefficients successifs des divers termes du quotient de la division du premier membre par $y - a$, ce qui ramène la recherche des autres racines entières à celles des racines d'une équation dont le degré est inférieur d'une unité à celui de l'équation proposée.

91. Voici comment on dispose les opérations.

On écrit sur une ligne horizontale les coefficients des diverses puissances de l'inconnue avec leur signe, en ayant soin de remplacer par zéro les coefficients des termes qui manquent. On obtient ainsi la suite

$$(a) \qquad 1 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots \qquad + A_{m-1} + A_m.$$

Soit a un des diviseurs de A_m; supposons qu'en essayant a on ait reconnu qu'il est racine; désignons par

$$B_{m-1},\ B_{m-2} \ldots\ldots B_2,\ B_1,\ 1$$

les quotients successifs trouvés comme il a été dit, mais changés de signe. On placera cette série de quotients sous la première en commençant par la droite, ce qui donnera les deux premières lignes du tableau suivant :

$$\begin{array}{llllll|l}
(a) & 1 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots & + A_{m-1} + A_m & a \\
(b) & \quad 1 + B_1 + B_2 + \ldots & + B_{m-2} + B_{m-1} & b \\
(c) & \qquad 1 + C_1 + \ldots & + C_{m-3} + C_{m-2} & c \\
(d) & \qquad\quad 1 + \ldots & + D_{m-4} + D_{m-3} & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

On opérera sur la suite (b) comme par la suite (a); 1° pour essayer si le nombre a n'est pas une seconde fois racine; 2° si cela n'a pas lieu pour essayer un autre nombre b, diviseur de B_{m-1}. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de racines entières.

Les nombres a, b, c, écrits à droite du tableau, sont les nombres essayés.

Si l'équation a, par exemple, trois racines entières a, b, c, les racines de la proposée sont

$$\frac{a}{A},\ \frac{b}{A},\ \frac{c}{A}.$$

L'équation

$$y^{m-3} + D_1 y^{m-2} + \ldots \quad + D_{m-4}\, y + D_{m-3} = 0$$

a pour racines toutes les racines non commensurables de la proposée. Remplaçant y par Ax et divisant par A^{m-4}; ce qui

revient à diviser les coefficients des termes successifs à partir du troisième par les puissances successives de A, on obtiendra une équation, qui sera l'équation proposée débarrassée de ses racines commensurables entières ou fractionnaires.

Tel est le procédé général à l'aide duquel on trouvera les racines commensurables d'une équation. Le nombre des essais auxquels on peut être conduit étant égal au nombre des diviseurs du dernier terme, est souvent considérable, mais on peut le réduire beaucoup en soumettant ces diviseurs aux conditions suivantes.

92. Pour qu'un nombre a soit racine, il faut que $a - 1$ divise le résultat de la substitution de 1 dans le premier membre de l'équation et que $a + 1$ divise le résultat de la substitution de -1 (§ 30).

En outre, il est inutile d'essayer les diviseurs qui ne sont point compris dans les limites des racines (§§ 62, 63).

Enfin, le théorème de Descartes, qui donne une limite supérieure du nombre des racines, soit positives, soit négatives, pourra quelquefois éviter quelques essais (§ 46).

93. *Exemple* I. Soit proposé de trouver les racines commensurables de l'équation

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0.$$

Pour cela il faut

1° Former $f(-x)$.

$$f(-x) = x^5 - 5x^4 + x^3 + 16x^2 - 20x + 16.$$

2° Appliquer le théorème de Descartes. $f(x)$ présente une variation, $f(-x)$ en présente 4, l'équation proposée peut donc avoir une racine positive et quatre racines négatives.

3° Chercher les limites des racines. $1 + \sqrt[3]{20}$ ou 4 peut-être pris, d'après la règle donnée, pour limite supérieure des racines de $f(x) = 0$, et comme la même règle appliquée à $f(-x)$ donne 21, cherchons une limite plus étroite en écrivant

$$f(-x) = x^4(x-5) + x(x^2 - 20) + 16(x^2 + 1),$$

où l'on voit que 5 est une limite supérieure des racines de $f(-x) = 0$ et, par suite, -5 une limite inférieure des racines de $f(x) = 0$.

4° Former les diviseurs du dernier terme compris entre les limites.

Ces diviseurs sont $1, 2, -1, -2, -4$.

5° Former les résultats de la substitution de 1 dans $f(x)$ et $f(-x)$.

On trouve en valeur absolue

$$f(1) = 45, \quad f(-1) = 9,$$

d'où l'on voit que ni 1, ni -1 ne sont racines.

6° Essayer si les nombres restants, augmentés d'une unité, divisent $f(-1)$.

$2+1, \ -2+1, \ -4+1$ divisent 9, donc $2, \ -2$ et -4 peuvent être racines.

7° Essayer si ces mêmes nombres, diminués d'une unité, divisent $f(1)$.

$2-1, \ -2-1, \ -4-1$ divisent 45.

Il résulte de cet examen que l'on doit essayer directement $2, -2$ et 4.

8° Écrire en ligne horizontale les coefficients de l'équation et essayer successivement les diviseurs non éliminés en commençant par les plus petits en valeur absolue.

Essai du diviseur 2.

(*a*)	$1 + 5 + 1 - 16 - 20 - 16$	2
(*b*)	$1 + 7 + 15 + 14 + 8$	

Ayant écrit la suite (*a*) des coefficients de l'équation proposée et placé le diviseur 2 à droite, nous dirons, écrivant à mesure de droite à gauche, les quotients obtenus changés de signe :

-16 divisé par 2 donne -8 et en changeant le signe $+8$, $-8-20$ donne -28
-28 divisé par 2 donne -14 et en changeant le signe $+14$, $-14-16$ donne -30
-30 divisé par 2 donne -15 et en changeant le signe $+15$, $-15+1$ donne -14
-14 divisé par 2 donne -7 et en changeant le signe $+7$, $-7+5$ donne -2
-2 divisé par 2 donne -1 et en changeant le signe $+1$, donc 2 est racine.

et comme l'équation n'a qu'une racine positive, il faut essayer les diviseurs négatifs.

Essai des diviseurs -2 *et* -4. La manière de faire les essais venant d'être donnée avec assez de détails, nous nous bornerons à donner le tableau complété de la suite des essais.

(*a*)	$1 + 5 + 1 - 16 - 20 - 16$	2
(*b*)	$1 + 7 + 15 + 14 + 8$	-2
(*c*)	$1 + 5 + 5 + 1$	-4
(*d*)	$1 + 1 + 1$	

d'où il suit que -2 et -4 sont racines, et que l'équation proposée, débarrassée des trois racines que l'on a trouvées, se réduit à

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

94. *Exemple* II. Soit donnée l'équation déjà considérée

$$(1) \quad x^3 - 5x^2 + 16x - 60 = 0.$$

On devra :

1° *Former la transformée en* $-x$

$$(2) \quad x^3 + 5x^2 + 16x + 60 = 0.$$

2° *Appliquer le théorème de Descartes.* Dans le cas actuel, il ne limite pas le nombre des racines positives, car l'équation (1) a trois variations, nombre maximum que puissent présenter quatre termes, et par suite (2) n'en offre aucune, en sorte que l'équation n'a pas de racines négatives.

3° *Chercher les limites des racines.* On a vu qu'on peut prendre 5 comme limite supérieure, et puisque l'équation n'a pas de racines négatives, 0 est une limite inférieure.

4° *Former les diviseurs du dernier terme, compris entre les limites trouvées.*

Dans le cas actuel ces diviseurs sont 1, 2, 3, 4.

5° *Former les résultats de la substitution de* 1 *dans* (1) *et* (2).

On obtient ici en valeur absolue $f(1) = 48$, $f(-1) = 82$, d'où l'on voit que 1 n'est pas racine.

6° *Essayer si les nombres choisis, augmentés d'une unité, divisent* $f(-1)$.

$2+1$, $3+1$, $4+1$ ne divisant pas 82, aucun des nombres 2, 3, 4 ne peut être racine.

Donc l'équation proposée n'a pas de racines commensurables.

95. *Exemple* III. Comme dernier exemple, soit encore à trouver les racines commensurables de l'équation :

$$f(x) = 6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16 = 0.$$

Nous devons à cet effet :

1° Former $f(-x)$,

$$f(-x) = 6x^6 + 19x^5 + 13x^4 + 20x^3 + 48x^2 - 16.$$

2° Appliquer le théorème de Descartes. $f(x)$ à cinq variations, $f(-x)$ en a une, l'équation peut avoir cinq racines positives et une négative, et nous sommes sûrs qu'elle a une racine positive et une racine négative (§ 34).

3° Chercher les limites des racines. On voit que $1 + \frac{20}{6}$ est une limite supérieure des racines positives et que $-\left(1 + \sqrt[6]{\frac{16}{6}}\right)$ ou -3 est une limite inférieure des racines négatives; mais la limite des racines positives peut être un peu abaissée, car en groupant les termes de $f(x)$ deux à deux dans l'ordre même où ils sont écrits, on voit que $\frac{19}{6}$ est une limite que l'on peut prendre.

4° Transformer l'équation en une autre dans laquelle le coefficient du premier terme soit l'unité. D'après la règle donnée (§ 61), on a :

$$y^6 - 19y^5 + 78y^4 - 720y^3 + 10368y^2 - 124416 = 0.$$

On a d'ailleurs entre x et y la relation

$$x = \frac{y}{6},$$

en sorte que les limites des racines de la nouvelle équation sont pour les racines positives 19, et pour les racines négatives -18.

5° Former les diviseurs du dernier terme compris entre les limites. Le dernier terme est $2^9\,3^5$; ses diviseurs compris entre les limites sont

$$\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 16, + 18.$$

6° Former $f(1)$ et $f(-1)$. On obtient, en substituant l'unité dans $f(x)$ et $f(-x)$, en valeur absolue

$$f(1) = 114708$$
$$f(-1) = 113230.$$

7° Essayer si les diviseurs choisis, augmentés de l'unité, divisent $f(-1)$. Or, il résulte de cet examen que les seuls diviseurs qui puissent être racines sont

$$-2, -3, +4, -6, +9, +12.$$

8° Essayer si les diviseurs restants diminués de l'unité divisent $f(1)$. On est conduit à rejeter encore -6 et 9, en sorte que les seuls diviseurs que l'on ait à essayer dans l'équation en y, sont

$$-2, -3, 4, 12.$$

9° Former les valeurs correspondantes de x. On obtient, en divisant les nombres précédents par 6,

$$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2$$

et examiner si le numérateur divise le dernier terme; cette condition se trouve ici remplie. Remarquons, en passant, que cet examen aurait pu être employé à l'élimination de quelques-uns des diviseurs; c'est ainsi que le diviseur 9 eut pu être rejeté.

10° Écrire en ligne horizontale les coefficients des puissances successives de l'inconnue et essayer successivement les diviseurs non éliminés en commençant par les plus petits en valeur absolue. On obtient ainsi le tableau suivant :

1	− 19 +	78 −	720 +	10368 +	0 −	124416	− 3
	1 −	22 +	144 −	1152 +	13824 −	41472	4
		1 −	18 +	72 −	864 +	10368	12
			1 −	6 +	0 −	864	

On reconnaît d'abord que -2 n'est pas racine, puis que -3, 4, 12 sont racines, en sorte que les racines commensurables de la proposée sont :

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3} \text{ et } 2.$$

11° Revenir de l'équation en y, qui donne les autres racines, savoir :

$$y^3 - 6y^2 - 864 = 0$$

à une équation en x, en remplaçant dans le cas actuel, y par $6x$ et divisant par 6^3, il vient

$$x^3 - x^2 - 4 = 0,$$

équation qui, d'après le théorème de Descartes, n'a plus qu'une racine réelle qui est positive.

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES.

96. Nous avons donné plus haut les principes de cette recherche ; elle repose sur le changement de signe qu'éprouve le premier membre d'une équation quand l'inconnue passe d'une valeur α à une valeur β dans l'intervalle desquelles se trouve *une* racine de cette équation. Il faut, par conséquent, qu'entre deux racines consécutives il existe un certain intervalle, c'est-à-dire que l'équation proposée n'ait pas de racines égales. Nous avons vu (§ 49) comment, lorsque l'équation est algébrique, on peut toujours reconnaître si elle a des racines égales et ramener sa résolution à celle d'équations dont toutes les racines sont simples. Nous avons vu aussi comment on s'assurait *a posteriori* qu'une racine d'une équation transcendante était multiple et quel était son degré de multiplicité, mais qu'on ne pouvait reconnaître *a priori* l'existence des racines multiples. Il nous reste à montrer comment on appliquera les principes énoncés à la séparation des racines d'une équation quelconque

et comment on pourra calculer chacune d'elle avec toute l'exactitude désirable.

I.

Séparation des racines d'une équation algébrique.

97. Nous avons déjà dit (§ 38) que si deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines, et que s'ils donnent des résultats de même signe, ils en comprennent un nombre pair.

Ces théorèmes ne suffisent pas à la séparation des racines, car ils ne fixent pas le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés, et on conçoit que si deux racines de l'équation sont voisines, elles puissent se trouver toutes deux dans l'intervalle de deux substitutions successives et rester inaperçues. Pour être sûr de séparer toutes les racines d'une équation, il faudrait substituer dans le premier membre des nombres équidistants dont la différence fût moindre que la plus petite différence des racines, ce qui pourrait conduire à des substitutions pénibles et très-nombreuses, la plupart inutiles, sans compter la difficulté de connaître l'intervalle des substitutions. [1]

98. *Premiers essais.* On essayera, en général, de séparer les racines en substituant dans le premier membre de l'équation des nombres entiers compris entre les limites des racines.

Pour expliquer la manière la plus simple de faire ces substitutions, prenons pour exemple la fonction

$$ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On peut l'écrire

$$x\,[x\,(ax + b) + c] + d$$

et l'on voit que si on y fait $x = \alpha$, on pourra obtenir le résultat en observant la règle suivante :

---

1. Lagrange a donné une méthode du calcul des racines d'une équation algébrique fondée sur cette remarque.



99. ***Règle pour substituer un nombre dans une fonction entière ordonnée suivant les puissances décroissantes de*** x.

Pour substituer un nombre α*, on multiplie le coefficient du premier terme par* α *et on ajoute le coefficient du second terme; on multiplie la somme par* α *et on ajoute le coefficient du troisième terme; on multiplie la nouvelle somme par* α *et on ajoute le coefficient du terme suivant et ainsi de suite, la dernière somme obtenue est le résultat cherché.*

100. *Exemple.* Séparer les racines de l'équation

$$y = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 20x - 15 = 0.$$

Cherchons d'abord les limites des racines, en écrivant l'équation sous la forme

$$x^3(x^2 - 5) + 5(2x^2 - 4x - 3) = 0$$

on reconnaît que $x = 3$ est une limite supérieure des racines positives. Changeons x en $-x$; la limite supérieure des racines de la transformée

$$x^5 - 5x^3 - 10x^2 - 20x + 15$$

est $1 + \sqrt{20}$, donc -6 est une limite inférieure des racines négatives de la proposée. Substituons les nombres entiers compris entre les limites, nous obtenons le tableau suivant:

x	y	x	y
0	-15	0	-15
1	-29	-1	$+19$
2	-23	-2	$+73$
3	$+$	-3	$+27$
		-4	-479

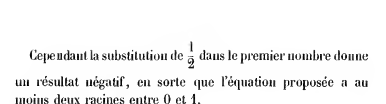
L'inspection de ces résultats montre qu'il y a trois racines, l'une positive entre 2 et 3, les deux autres négatives entre 0 et -1 et entre -3 et -4. Il est d'ailleurs peu probable que l'équation puisse avoir d'autres racines positives. En effet, si l'on représente comme il a été dit (§ 1) les résultats de la substitution des divers nombres choisis, la figure obtenue fait

penser que la séparation est complète, car l'équation ne peut avoir plus de deux racines négatives.

101. *Remarque.* Toutefois les indications d'une pareille figure pourraient dans certains cas particuliers induire complétement en erreur sur les recherches ultérieures à faire. Pour en donner un exemple, soit l'équation

$$8x^7 - 9x^6 - 27x^5 + 28x^4 + 40x^3 - 20x^2 - 19x + 5 = 0.$$

La substitution des nombres -2, -1, 0, 1, 2 donne -645, 2, 5, 6, 239, et le tracé graphique de la courbe, qui paraît d'après ces résultats devoir représenter la fonction, ne fait nullement pressentir l'existence de racines positives dans le voisinage des nombres substitués.



Cependant la substitution de $\frac{1}{2}$ dans le premier nombre donne un résultat négatif, en sorte que l'équation proposée a au moins deux racines entre 0 et 1.

102. ***Comment on détermine le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés. Théorème de Sturm.***

Il est donc nécessaire d'avoir un moyen sûr de reconnaître combien il y a de racines entre deux nombres donnés.

On y arrive à l'aide d'un théorème dû à M. Sturm, et qui, à cause de son extrême importance, a conservé le nom de son auteur. Nous n'en donnerons pas la démonstration, mais nous croyons indispensable à la solution complète du problème que nous nous sommes proposé, d'en montrer l'application.

Voici en quoi consiste ce théorème.

Soit une équation $V = 0$ qui n'a plus de racines égales, prenons la dérivée V_1 de V et divisons V par V_1, nous obtiendrons un reste, soit V_2 ce reste changé de signe; divisons V_1 par V_2, nous obtiendrons un nouveau reste, soit V_3 ce reste changé de signe; divisons V_3 par V_2, etc., en d'autres termes, effectuons les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur entre V et sa dérivée, en ayant soin de changer à chaque division le signe du reste; nous parviendrons à un reste numérique, puisque l'équation n'a pas de racines égales, soit V_r ce reste changé de signe. Écrivons la suite des fonctions

$$(x) \qquad V \;\; V_1 \;\; V_2 \;\; V_3 \;\ldots\ldots\; V_r.$$

Cela posé, pour savoir combien l'équation $V = 0$ a de racines entre les deux nombres α et β, β étant plus grand que α; substituons α dans la suite des fonctions et écrivons les signes des résultats successifs obtenus; substituons de même β; comptons le nombre des variations que présente la suite (α) et le nombre de variations que présente la suite (β), la différence entre ces deux nombres sera le nombre des racines comprises entre α et β.

103. En particulier, si on veut savoir combien l'équation proposée a de racines positives et de racines négatives, il faudra substituer dans la suite des fonctions $-\infty$, $0, \infty$, ce qui revient à écrire les signes des premiers termes et des derniers termes des fonctions. D'après cela, on écrira : 1° la suite des signes des premiers termes, en ayant soin de les changer lorsque les termes sont de degré impair; 2° la suite des signes des derniers termes; 3° la suite des signes des premiers termes. On formera ainsi un tableau tel que le suivant :

x	V	V_1	V_2	......	V_r	v
$-\infty$	+	—	—		+	n
0	—	+	—		—	n'
$+\infty$	+	+	—		+	n''

n, n', n'' étant les nombres des variations des trois suites, l'équation aura $n-n'$ racines négatives et $n'-n''$ racines positives, en tout $n-n''$ racines réelles.

104. *Exemple* I. Soit l'équation

$$V = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 20x - 15 = 0.$$

On a

$$V_1 = x^4 - 3x^2 + 4x - 4$$
$$V_2 = 2x^3 - 6x^2 + 16x + 15$$
$$V_3 = 4x^2 + 55x + 53$$
$$V_4 = 1832x - 1783$$
$$V_5 = -$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation proposée peut avoir trois racines positives et deux racines négatives. Appliquons le théorème de Sturm. Nous obtenons le tableau suivant :

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	v
$-\infty$	—	+	—	+	+	—	4
0	—	—	+	+	—	—	2
$+\infty$	+	+	+	+	—	—	1

L'équation a donc deux racines négatives et une seule racine positive.

Les trois racines séparées § 100 sont donc les seules racines réelles de l'équation proposée.

Lorsque l'application du théorème de Sturm révèlera l'existence de plusieurs racines, positives par exemple, il pourra arriver que la substitution de la suite des nombres entiers de 0 à la limite supérieure L des racines positives ne sépare pas les racines, ou que cette suite soit trop nombreuse pour essayer la substitution; il faut alors dans la suite (x) des fonctions substituer des nombres compris dans l'intervalle de 0 à L, de façon à connaître le nombre des racines comprises dans

les nouveaux intervalles qu'ils déterminent. Par exemple, si les racines positives de l'équation étaient entre 0 et 100, il faudrait chercher combien il y en a entre 0 et 50; si elles sont toutes entre 0 et 50, on cherchera combien il y en a entre 0 et 25 et, par suite, entre 25 et 50, et ainsi de suite.

104. *Exemple* II. Soit donnée l'équation

$$V = x^6 - 60x^4 + 10x^3 - 120x^2 + 6x - 1650 = 0.$$

On a $V_1 = x^5 - 40x^3 + 5x^2 - 40x + 1$

$V_2 = 4x^4 - x^3 + 16x^2 - x + 330$

$V_3 = 701x^3 - 68x^2 + 1959x + 314$

$V_4 = -67288x^2 + 553067x - 40501906$

$V_5 = 110316422677x + 917865361528$

$V_6 = +$

Le théorème de Descartes apprend que l'équation $V = 0$ peut avoir cinq racines positives et une racine négative; d'ailleurs nous savons qu'elle a au moins une racine positive et une négative. Appliquons le théorème de Sturm pour savoir si elle a plus d'une racine positive. On a le tableau suivant:

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	v
0	—	+	+	+	—	+	+	3
∞	+	+	+	+	—	+	+	2

Donc l'équation proposée n'a qu'une racine positive. D'autre part la limite supérieure des racines est 42; substituons d'abord dans V les nombres simples: 10, 20, 30, afin de resserrer la racine entre deux nombres de dizaines. La substitution de 10 donne un résultat positif, donc la racine est entre 0 et 10. Substituons 5, le résultat est négatif, la racine est entre 5 et 10; substituons 7, on a le signe —, enfin 8 donne le signe +. La racine positive est donc comprise entre les deux nombres 7 et 8. On pourra continuer de la même manière en substituant toujours la moyenne des deux derniers nombres dont la substitution a donné des signes contraires. Nous verrons plus loin comment on approchera plus rapidement de la valeur exacte en faisant les substitutions d'après une autre loi.

L'exemple qui vient d'être traité montre que le théorème de Sturm est d'un usage pénible; aussi ne doit-on l'employer que dans les cas où il est impossible d'avoir recours à des artifices particuliers ou à des théorèmes d'une application plus simple, telle que ceux de Descartes (§ 46) et de Rolle (§ 40). Nous allons montrer sur quelques exemples comment on peut quelquefois séparer d'une manière assez rapide toutes les racines d'une équation, sans avoir recours au théorème de Sturm.

105. *Exemple* III. Reprenons l'équation déjà traitée

$$x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 20x - 15 = 0.$$

Elle ne peut, d'après le théorème de Descartes, avoir plus de trois racines positives, et nous avons vu que ces trois racines, si elles existent, sont comprises entre 0 et 3. Mais si l'équation a trois racines entre 0 et 3, la dérivée

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

doit avoir au moins deux racines entre ces deux nombres. Cette dérivée peut avoir trois racines positives; en y substituant 0 et 3, les résultats sont de signe contraire; elle a donc trois racines entre 0 et 3 ou une. Si cette équation a trois racines entre 0 et 3, sa dérivée

$$2x^3 - 3x + 2 = 0$$

doit avoir au moins deux racines entre 0 et 3; or (§ 77), cette équation n'a qu'une seule racine qui est négative, donc la précédente n'a qu'une racine entre 0 et 3 et, par suite, la proposée a une seule racine positive.

Quant aux deux racines négatives que l'équation peut avoir, elles ont été séparées plus haut.

106. *Exemple* IV. Donnons encore un exemple où l'application du théorème de Sturm n'est pas indispensable.

Soit l'équation

$$x^7 - 4x^4 + x^3 - 2 = 0.$$

Elle a une racine positive et pas plus de trois d'après le théorème de Descartes.

La transformée en $-x$

$$x^7 + 4x^4 + x^3 + 2 = 0$$

n'a pas de racines positives, donc la proposée, n'a pas de racines négatives.

En écrivant le premier nombre sous la forme

$$x^4 (x^3 - 4) + x^3 - 2 = 0,$$

on voit que $x = \sqrt[3]{4}$ est une limite supérieure des racines et que $\sqrt[3]{2}$ en est une limite inférieure, c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation sont entre 1, 2 et 1, 6. Mais si l'équation a trois racines dans cet intervalle, la dérivée doit en avoir au moins deux dans le même intervalle. Or, la dérivée du premier membre, égalée à zéro, donne

$$x^2 [x (7x^3 - 16) + 3] = 0.$$

Le premier membre a le même signe pour $x^3 = 4$ et pour $x^3 = 2$, et il n'en change pas dans l'intervalle, car la dérivée de cette dernière équation aurait une racine entre 1, 2 et 1, 6. Or, cette dérivée, égalée à zéro, donne

$$x (7x^3 - 8) + 1 = 0;$$

elle n'a pas de racines entre les limites précédentes, donc la première dérivée n'a pas de racines dans le même intervalle, donc la proposée n'a qu'une racine positive.

107. *De la marche à suivre pour résoudre une équation algébrique.* L'équation étant mise sous forme entière, $f(x)=0$.

1° On cherchera les racines commensurables égales ou inégales. En employant la méthode exposée (§ 91), on obtiendra une équation qui n'aura plus que des racines incommensurables ou des racines imaginaires.

2° Si le degré de cette équation dépasse cinq, on lui appliquera la méthode des racines égales. On reconnaîtra ainsi qu'elle n'a pas de racines égales, ou bien sa résolution sera ramenée à celle d'équations dont toutes les racines sont différentes.

3° On cherchera, par un certain nombre de substitutions faciles, à séparer toutes les racines des équations obtenues, en s'aidant, s'il est nécessaire, du théorème de Rolle.

4° Si la séparation n'est pas complète, on appliquera pour l'achever le théorème de Sturm. Les racines étant séparées :

5° On emploiera les procédés décrits plus loin (§ 137) pour obtenir l'une quelconque des racines avec autant d'approximation que l'on voudra.

Ainsi se trouvera complétement effectuée la recherche des racines réelles d'une équation algébrique numérique de degré quelconque.

II.

Séparation des racines d'une équation transcendante.

108. Nous avons déjà dit qu'on ne pouvait en général assigner de limites au nombre et à la grandeur des racines d'une équation transcendante, et qu'un examen spécial était nécessaire dans chaque cas particulier pour avoir des notions plus ou moins complètes sur cette double question.

L'étude de la dérivée du premier membre pourra aussi jeter quelque lumière sur cette recherche. Pour expliquer d'une manière précise la marche à suivre dans les divers cas que l'on peut rencontrer, il est nécessaire de prendre quelques exemples.

109. *Exemple* I. Séparer les racines de l'équation

$$\sin 2x + \sin x - x = 0.$$

D'après la définition du sinus, on voit aisément que cette équation ne peut avoir de racines inférieures à $\frac{\pi}{4}$ ni supérieures à $\frac{\pi}{2}$. De plus, elle n'en a qu'une dans cet intervalle, car si elle en avait deux, sa dérivée en aurait au moins une. Or, l'équation dérivée est

$$2\cos 2x + \cos x - 1 = 0$$

ou

$$4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0,$$

d'où

$$\cos x = -1,\ \cos x = \frac{3}{4}.$$

Les valeurs de x ne sont pas comprises entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, donc l'équation proposée n'a qu'une racine positive. Et l'on voit aussi qu'elle a une racine négative égale à la première et de signe contraire.

110. *Exemple* II. Séparer les racines de l'équation

$$\frac{1}{x} - \lg x - \frac{\cos x}{x} = 0.$$

On peut l'écrire

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - x \lg x = 0.$$

On voit qu'elle n'a pas de racines négatives, car $\lg x$ serait imaginaire ; elle n'a pas non plus de racines positives inférieures à 1, car tant que x est moindre que 1, $\lg x$ est négatif; x croissant à partir de 1, valeur pour laquelle le premier membre est positif, la fonction $x \lg x$ est continuellement positive et croissante, tandis que $2 \sin^2 \frac{1}{2} x$, d'abord supérieur à $x \lg x$ et croissant, décroit ensuite; x atteint donc une valeur pour laquelle les deux fonctions sont égales. Cette valeur est unique. En effet, la dérivée du premier membre

$$\sin x - \lg x - \mathrm{M},$$

positive pour $x = 1$, s'annule ensuite, puis devient négative indéfiniment; donc la fonction, d'abord croissante, atteint un maximum, puis décroit constamment et, par conséquent, ne peut s'annuler qu'une fois, et on voit aisément que π et $\frac{3\pi}{2}$ donnent des résultats de signes contraires, la racine est donc comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$.

111. *Exemple* III. Trouver les racines de l'équation

$$2^x - x \operatorname{tg} x = 0.$$

Quand x varie de $k\pi$ à $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ est positive et prend

toutes les valeurs de 0 à l'infini; il y a donc dans cet intervalle une valeur du produit $x \operatorname{tg} x$ qui est égale à 2^x, donc l'équation a une infinité de racines positives; de même, l'équation a une infinité de racines négatives dans chaque intervalle de $-k\pi$ à $-\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. La séparation des racines est toute faite, puisqu'il s'en trouve toujours une et une seule dans les intervalles considérés.

112. *Exemple* IV. On rencontre dans la théorie des machines à vapeur l'équation

$$lx - ax + 1 = 0,$$

dans laquelle a désigne un nombre variable entre 0 et 1.

Il est aisé de voir qu'elle a deux racines, l'une plus petite que 1 et l'autre plus grande que 1. En effet, $x = 0$ donne un résultat négatif, $x = 1$, donne $1 - a$, qui est positif, et pour une valeur de x, suffisamment grande, on a encore un résultat négatif, car ax croît beaucoup plus rapidement que lx. D'ailleurs l'équation n'a pas plus de deux racines, car l'équation dérivée

$$\frac{1}{x} - a = 0$$

n'en a qu'une.

Ces exemples suffisent pour montrer comment on devra procéder sur d'autres; nous verrons plus loin comment le tracé de courbes peut souvent faciliter les considérations dont on a fait usage.

CHAPITRE IV.

DE L'EMPLOI DES COURBES A LA SÉPARATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

I.

Principes de la méthode.

113. Nous avons vu comment, par le secours seul de l'algèbre, on parvenait d'une manière certaine à séparer les racines

d'une équation algébrique dans tous les cas qui peuvent se présenter, et que les procédés de séparation des racines d'une équation transcendante étaient insuffisants. Nous allons voir maintenant que dans des cas particuliers nombreux on peut employer utilement des constructions graphiques. Ces constructions, en général, non-seulement faciliteront la séparation des racines, mais les feront en même temps connaître avec une approximation suffisante, ou du moins assez grande pour que les méthodes de correction puissent être immédiatement appliquées aux valeurs trouvées.

114. *Principe de la méthode.* L'emploi des courbes repose sur la proposition suivante.

Une équation quelconque à une seule inconnue x *peut toujours être considérée comme résultant de l'élimination d'une autre variable* y, *entre deux équations renfermant* x *et* y.

Nous avons déjà considéré, en effet, les racines d'une équation $f(x) = 0$ comme étant les abscisses des points d'intersection des deux courbes

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = 0,$$

ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = 0$ a été regardée comme le résultat de l'élimination de y entre les deux équations ci-dessus.

La courbe $y = f(x)$ n'étant pas connue *a priori*, le tracé de cette courbe équivaut à l'étude de la fonction $f(x)$; la première question est complétement identique avec la seconde, et la nouvelle manière d'envisager la recherche des racines de $f(x) = 0$ n'en diminue pas la difficulté.

Mais il n'en sera pas de même si l'on établit une relation choisie entre la variable y et une partie des fonctions qui entrent dans l'équation. Pour bien le faire comprendre, soit à trouver les racines de l'équation

$$(1) \qquad ax - \sin x + b = 0.$$

Si nous établissons entre y et x la relation

$$(2) \qquad y = \sin x,$$

l'équation (1) pourra être considérée comme résultant de l'élimination de y entre l'équation (2) et celle que l'on obtient en remplaçant dans (1) $\sin x$ par y, ce qui donne

$$(3) \qquad y = ax + b.$$

Imaginons que nous construisions ces deux courbes dont la marche est connue. Nous verrons sur la figure qu'elles se coupent en divers points; soit M l'un de ces points. Pour le point M l'ordonnée y est la même sur les deux courbes, en sorte que l'abscisse de ce point satisfait à l'équation (1) obtenue en égalant les valeurs de y, c'est-à-dire en éliminant y entre les deux équations (2) et (3). Ce raisonnement est général.

115. *Des conditions dans lesquelles il convient de considérer les racines d'une équation comme les abscisses des points d'intersection de deux courbes.*

Nous venons de voir comment le tracé d'une courbe inconnue $y = ax - \sin x + b$ avait été remplacé, pour la recherche qui nous occupe par le tracé de deux courbes, dont l'une, $y = \sin x$, peut-être considérée comme connue et, en outre, ne dépend pas des paramètres variables qui entrent dans l'équation proposée, et dont l'autre est une ligne droite facile à construire. On devra recourir aux courbes dans tous les cas analogues, et comme on peut d'une infinité de manière choisir deux courbes qui, par leur intersection, font connaître les racines d'une équation donnée, il est bon de formuler une règle qui limite le choix que l'on peut faire.

116. *Du choix des courbes à employer.* Étant donnée une équation $f(x) = 0$, on établira entre la variable y ou une fonction de y et une partie des fonctions qui entrent dans l'équation une relation $y = \varphi(x)$ ou $\varphi(x, y) = 0$, telle que la courbe représentée par cette équation soit facile à construire, et telle, en outre, qu'en mettant y à la place de $\varphi(x)$ dans $f(x)$, on ait aussi une courbe $y = F(x)$ ou $F(x, y) = 0$ qui puisse être aisément tracée.

Il semble que ces conditions complexes doivent rendre très-rare l'application de la méthode; nous verrons plus loin que les cas où elle peut être employée sont cependant très-fréquents.

117. *Avantage de l'emploi des courbes.* L'emploi des courbes peut conduire à une séparation certaine des racines d'une équation $f(x) = 0$ quand la construction de la courbe $y = f(x)$ laisse de l'incertitude sur l'existence des racines dans un certain intervalle.

On conçoit, en effet, que les deux courbes choisies se coupent en des points dont les abscisses soient très-voisines, sans que les points d'intersection soient voisins et, par suite, sans qu'il y ait en général de doute sur leur existence. Les points d'intersection peuvent même être voisins, et néanmoins déterminés d'une manière certaine; il suffit, en effet, qu'en ces points les tangentes aux deux courbes fassent un angle assez grand. On en verra des exemples dans les applications. (Voir §§ 129, 130.)

118. *Courbes à construire.* Pour que la méthode exposée soit prompte et d'un emploi commode, il faut construire d'avance certaines courbes dont le nombre est assez limité, eu égard aux fonctions que l'on rencontre dans les équations. Nous verrons qu'en traçant d'avance les deux courbes

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = x^3$$

on pourra construire les racines d'une équation algébrique jusqu'au sixième degré inclusivement, en employant comme seconde courbe une courbe variable du premier ou du second degré.

Dans les cas rares où l'on a à résoudre une équation de degré supérieur au sixième, il faudra avoir recours à des courbes de degré plus élevé.

Dans les équations transcendantes on rencontrera ordinairement, outre les fonctions algébriques x, x^2, x^3..., les transcendantes $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x, $e^x + e^{-x}$, $e^x - e^{-x}$, lx. Nous

supposerons donc construites les courbes qui représentent ces fonctions et leurs inverses

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \frac{1}{e^x}, \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \frac{1}{l^x}.$$

119. *Degré de l'approximation avec laquelle on obtient les racines dans le tracé des courbes.* La plupart des courbes pourront être construites en prenant cinq centimètres pour unité; ce choix est fixé par la nécessité de pouvoir mesurer à partir de l'origine des abscisses suffisamment grandes et de faire en même temps cette mesure avec assez de précision. D'après cela un demi-millimètre représentera un centième. On peut admettre que les erreurs d'un tracé, fait avec soin sur le papier, seront inférieures à cette limite, et, par conséquent, dans les cas les plus ordinaires on aura chaque racine environ à moins d'un centième. Toutefois, si les courbes se coupent fort obliquement, on pourra commettre une erreur plus grande; si elle pouvait dépasser cinq millimètres ou un dixième, le choix des courbes serait défectueux.

120. *Du tracé graphique.* Toutes les fois que l'on aura une courbe à tracer, il conviendra de le faire d'abord d'une manière grossière et sans aucune précision pour reconnaître sa marche, et on ne fera un tracé précis que dans les environs des points où l'on estime que l'intersection aura lieu.

121. *Inconvénients de cette méthode; comment on peut les éviter.* Nous avons déjà dit que la méthode graphique n'était pas toujours avantageuse; mais dans les cas mêmes où elle peut s'appliquer, il arrivera que cette application ne pourra se faire à l'aide des courbes tracées à l'avance, parce que la grandeur des racines dépassera les limites de l'épure. Il faudra dans ce cas construire tout exprès une figure à une échelle moindre, ce qui diminuera la précision des résultats tout en augmentant la longueur des opérations, ou bien on changera l'inconnue en liant sa valeur à celle d'un autre z, qui pour chaque valeur de x prendra une valeur moindre, et on remplacera dans l'équation x en fonction de z.

Enfin, la méthode exige quelquefois, pour rendre son application facile, des transformations préliminaires. (Exemple, § 135, 148.)

II.

Construction des racines d'une équation algébrique.

122. *Équation du troisième degré.* Soit donnée l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

On obtiendra les racines de cette équation par l'intersection des deux courbes

$$y = x^3, \qquad y + px + q = 0.$$

La première est construite, la seconde est une droite aisée à tracer.

Si l'on a

$$x^3 + px^2 + q = 0,$$

on pourra obtenir ses racines par l'intersection de la courbe constante

$$y = \frac{1}{x^2}$$

et de la droite

$$x + p + qy = 0.$$

Lorsque l'équation est complète

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

on trouvera ses racines à l'aide des courbes

$$y = x^2, \qquad xy + Ay + Bx + C = 0.$$

La première est construite, la seconde est une hyperbole dont les asymptotes $x = -A$, $y = -B$ peuvent être immédiatement tracées et donnent le moyen de construire l'hyperbole par points à l'aide de cette propriété bien connue : les portions d'une sécante comprise entre une hyperbole et ses asymptotes sont égales. Il en résulte qu'en déterminant un point de la courbe à l'aide de son équation, on pourra en déterminer graphiquement une infinité d'autres.

123. *Équation du quatrième degré.* Soit à construire les racines de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

A la courbe

$$y = x^2$$

on joindra l'hyperbole

$$xy + Bx^2 + Ay + Cx + D = 0,$$

que l'on construira, comme l'on vient de le dire, à l'aide des asymptotes, dont les équations sont

$$x = -A \qquad y = -Bx + AB - C.$$

124. *Détermination des racines d'une équation du troisième ou du quatrième degré à l'aide d'une parabole et d'un cercle.*

Écrivons l'équation du quatrième degré sous la forme

$$(1)\ \left(x^2 + \frac{Ax}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{4}\right)x^2 + Cx + D = 0$$

et posons

$$(2)\ y = x^2 + \frac{Ax}{2};$$

à cette équation il faudra joindre

$$(3)\ y^2 + \left(B - \frac{A^2}{4}\right)x^2 + Cx + D = 0.$$

Nous allons remplacer cette équation par une combinaison des deux dernières, obtenue en multipliant l'équation (2) par $B - \frac{A^2}{4} - 1$ et ajoutant membre à membre avec (3), ce qui donne

$$y^2 + x^2 + \left(B - \frac{A^2}{4} - 1\right)y + \left[C - \frac{A}{2}\left(B - \frac{A^2}{4} - 1\right)\right]x + D = 0,$$

équation d'un cercle qui, joint à la parabole représentée par l'équation (2), détermine les racines cherchées.

Cette méthode a l'inconvénient d'obliger à construire les deux courbes, puisque leurs équations renferment toutes deux des paramètres variables. Ou bien on devra faire disparaître le



second terme (§ 58). Si le second terme manque, faisons dans les équations ci-dessus

$$A = 0$$

et on aura pour déterminer les racines de l'équation :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

la parabole constante

$$y = x^2$$

d'une part, et d'autre part un cercle dont le centre a pour coordonnées

$$x = \frac{q}{2},\ y = \frac{p-1}{2}$$

et dont le rayon a pour valeur

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{q^2+(p-1)^2-4r.}$$

Si dans les calculs précédents on suppose $r = 0$ et si on néglige la racine $x = 0$ que l'on obtient, on aura par les mêmes constructions les racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

125. *Équation du cinquième et du sixième degré.* Si dans l'équation du sixième degré on fait disparaître le second terme (§ 58), on a :

$$x^6 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

et on pourra construire ses racines à l'aide de la courbe constante

$$y = x^3$$

et d'une courbe du second degré

$$y^2 + pxy + rx^2 + qy + sx + t = 0.$$

Dans ces équations faisons $t = 0$ et négligeons la racine $x = 0$, nous obtiendrons par les mêmes moyens les racines de l'équation du cinquième degré

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

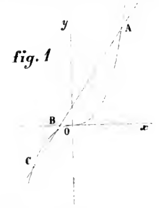
126. *Exemple* I. Construire les racines de l'équation

$$x^3 - 1{,}512x - 0{,}476 = 0.$$

Sur l'épure où l'on a tracé $y = x^3$, je construis la droite

$$y = 1{,}512x + 0{,}476.$$

en ayant soin de prendre la même unité que dans la figure déjà construite. On obtient une figure semblable à celle qui



est ici tracée. En mesurant les distances des points A, B, C à l'axe des y, on a pour les trois racines, et environ à un $\frac{1}{100}$ près, les nombres 1,36, — 0,34, — 1,02.

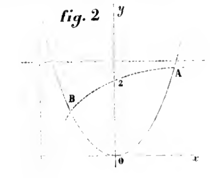
127. *Exemple* II. Construire les racines de l'équation

$$2x^3 + 4x^2 + 5x - 8 = 0.$$

Si, employant la méthode donnée (§ 122), on pose $y = x^2$, on a à construire une hyperbole

$$2xy + 4y - 5x - 8 = 0,$$

dont la branche inférieure fait connaître par son intersection avec la parabole les racines 1,49, — 1,15.



La troisième racine ne peut être déterminée, parce que l'intersection se fait hors de l'épure.

Pour connaître cette troisième racine, on peut remarquer que la somme des trois racines est — 2; comme on connaît déjà deux d'entre elles, la troisième s'obtient par une soustraction, ce qui donne — 2,34.

128. *Exemple* III. Soit l'équation du sixième degré

$$x^6 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x + 1 = 0.$$

Posant

$$y = x^3,$$

on a l'hyperbole

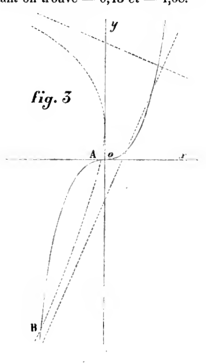
$$y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 8x + 1 = 0.$$

Pour la construire, résolvons par rapport à y, il vient

$$y = x + 1 \pm \sqrt{2x^2 - 6x}.$$

Traçons le diamètre $y = x + 1$, on obtient dès lors la courbe sans peine, en ayant soin de tracer avec exactitude les portions de la courbe voisines des points d'intersection.

La figure 3 montre que l'équation a deux racines seulement; en les mesurant on trouve — 0,13 et — 1,68.



Pour arriver par l'algèbre à ces conclusions, il eût fallu de nombreux essais pour connaître avec la même approximation les racines existantes et l'application du théorème de Sturm pour s'assurer qu'il n'y a que deux racines.

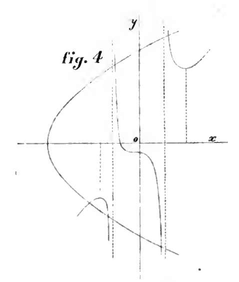
129. *Exemple* IV. Soient à construire les racines de l'équation

$$x^6 - 20x^5 - 100x^4 + 42x^3 + 200x^2 - 80x - 399 = 0.$$

Je laisserai au lecteur le soin de construire les racines de cette équation, choisie pour justifier la proposition énoncée (§ 117). Cette équation a, en effet, deux racines voisines de $\sqrt{2}$ et deux autres voisines de $-\sqrt{2}$. Si on la regarde comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2} \quad \text{et} \quad y^2 = 20x + 100,$$

la construction de ces deux courbes rend évidente (fig. 4) l'existence de ces quatre racines, et montre aussi qu'il en existe deux autres.



130. *Exemple* V. La même proposition se trouve justifiée

d'une autre manière en construisant les racines de l'équation

$$x^8 - 16x^6 + 65x^4 - 16x^2 - x + 64 = 0$$

au moyen des deux courbes

$$y = x^2 - 8 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{x}{1 + x^4},$$

ce qui donne la figure suivante :

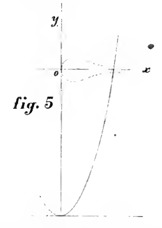


fig. 5

On voit clairement que l'équation a deux racines, quoiqu'elles soient très-voisines l'une de l'autre; la figure exacte donne pour leur valeur : 2,79 et 2,87.

131. *Équation de degré supérieur au sixième.* On emploiera des procédés graphiques analogues à ceux qui viennent d'être décrits pour séparer les racines des équations de degré supérieur au sixième. On aura des courbes moins simples à construire si l'équation a un grand nombre de termes; mais si l'équation n'a qu'un petit nombre de termes, comme cela arrive dans le dernier exemple traité, on voit qu'on arrivera aisément à tracer des courbes qui résolvent la question.

132. *Construction des racines d'un système de deux équations du second degré à deux inconnues.* On construira ces racines soit en traçant les deux courbes du second degré données ou d'autres courbes qui passent par leurs points d'intersection, ou en éliminant l'une des inconnues entre les deux

équations, ce qui fournit une équation du 4e degré dont on sait construire les racines.

La première méthode est préférable, parce qu'elle fait connaître à la fois les deux inconnues ; pour avoir des valeurs plus approchées que celles que l'on mesure, on peut employer la méthode suivante.

Soient les deux équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0;$$

α et β un système de valeurs approchées d'x et y, $\alpha + h$ et $\beta + k$ les valeurs exactes. On calculera des valeurs approchées de h et k à l'aide des deux équations

$$(2C\alpha + B\beta + E)h + (2A\beta + B\alpha + D)k = A\alpha^2 + B\alpha\beta + \ldots + F$$
$$(2C'\alpha + B'\beta + E')h + (2A'\beta + B'\alpha + D')k = A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + \ldots + F'.$$

On aura ainsi de nouvelles valeurs α' et β' en ajoutant à α et β les valeurs de h et k déterminées par ces équations. Les mêmes équations où l'on mettra α' et β', au lieu de α et β, donneront de nouvelles corrections h' et k' et ainsi de suite.

III.

Construction des racines d'une équation transcendante.

Pour grouper les équations transcendantes que l'on rencontre ordinairement, désignons par T une transcendante quelconque, et nous pourrons écrire les types suivants :

133. *Équations qui ne renferment qu'une transcendante.*

Les équations de la forme

$$T = ax + b$$

se résoudront à l'aide de la courbe $y = T$ et d'une droite. A cette forme appartiennent les équations suivantes que l'on rencontre dans diverses applications.

$$x - a\sin x = b$$
$$lx = ax - 1$$
$$e^x - e^{-x} = ax$$
$$x - \operatorname{tg} x = 0$$
$$x - \cos x = 0.$$

La première se rencontre en astronomie, la seconde dans la théorie des machines à vapeur, la troisième dans l'étude de la chaînette, la quatrième dans la théorie de la chaleur, la dernière a été traitée par Euler.

Les équations qui rentrent dans la forme

$$aT^2 + bTx + cx^2 + dT + ex + f = 0,$$

pourront être résolues à l'aide de la courbe $y = T$ et d'une courbe du second degré.

Généralement, si l'équation est de la forme

$$T = \varphi(x),$$

elle n'exigera que la construction de la courbe $y = \varphi(x)$.

Telles sont les équations suivantes que l'on rencontre aussi dans les applications :

$$\operatorname{tg} x = \frac{4x}{3-4x^2}$$

$$lx = a\frac{(x-1)^2}{x}$$

$$lx = \frac{100}{x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b^2}{x}.$$

134. *Équations qui renferment deux ou plusieurs transcendantes.* Lorsque l'équation renferme deux transcendantes, l'emploi des courbes pourra encore être avantageux si l'équation est de la forme

$$S + T = 0$$

ou

$$ST = a;$$

telle est l'équation

$$(e^x + e^{-x})\cos x = \pm 2.$$

Mais si elle est de la forme

$$T = \varphi(S),$$

il faudra construire la courbe $y = \varphi(S)$, dont la forme est inconnue.

Enfin, si l'équation renferme plusieurs transcendantes, on la

résoudra par rapport à l'une d'elles ; mais, à moins que le second membre n'ait une composition simple, l'application de la méthode graphique facilitera peu la séparation des racines de l'équation proposée.

135. Une équation peut, par un changement de variable, être amenée à une forme plus commode pour la construction de ses racines.

Telle est l'équation employée dans le calcul des orbites planétaires

$$\sin^4 z = b \sin z - c \cos z.$$

En posant $\cot g\, z = x$, elle devient

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = b - cx$$

Si l'on construit la courbe constante

$$y = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on n'aura qu'à tracer la droite variable $y = b - cx$ pour avoir les racines de l'équation. Ce procédé est employé à l'Observatoire de Paris.

Les racines de l'équation

$$2\left[x\sqrt{x^2-1} - l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right] - x^2 = 0,$$

en posant $x + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{z}$, ce qui transforme l'équation en la suivante,

$$4lz = z - 2 - \frac{3}{z},$$

pourront être construites en joignant à la logarithmique une hyperbole

$$4y = z - 2 - \frac{3}{z}.$$

CHAPITRE V.

MÉTHODES D'APPROXIMATION POUR LE CALCUL DES RACINES.

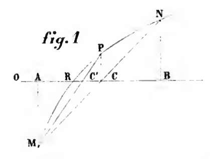
136. Nous avons vu comment on pouvait arriver soit par le calcul, soit par des constructions graphiques, à trouver des valeurs approchées des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Les valeurs trouvées par les procédés graphiques seront en général suffisantes dans la pratique; mais si on veut avoir une approximation plus grande, on peut, par un calcul assez rapide, obtenir chaque racine avec une erreur aussi petite qu'on voudra.

Les considérations les plus simples qui puissent conduire à ces calculs sont les suivantes:

137. *Méthode des parties proportionnelles.* Soit

$$F(x) = 0$$

l'équation dont on veut calculer une racine, soient a et $a + h$ deux nombres qui la comprennent et qui n'en comprennent pas d'autres. Si l'intervalle h est assez petit, la concavité de la courbe qui représente la marche de la fonction $F(x)$ dans l'intervalle de a à $a + h$, ne change pas de sens et présente, par exemple, la forme donnée dans la figure (1); en outre $F'(x)$ conserve toujours le même signe dans cet intervalle.



Soit $OA = a$ et $AB = h$. Traçons la corde MN, elle rencontre l'axe des x en un point C; nous prendrons OC pour la valeur corrigée de x. Le point C est toujours dans l'intervalle

AB, et l'on voit que si on calcule la valeur CP de la fonction pour $x = OC$, on pourra faire une nouvelle correction, ce qui donnera OC' et ainsi de suite. Il ne nous reste plus qu'à donner l'expression de la valeur corrigée. Dans les triangles semblables, ACM, BCN, on a :

$$AC = AB. \frac{AM}{AM + BN}$$

ou

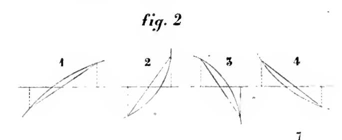
$$AC = -h. \frac{F(a)}{F(a+h) - F(a)}.$$

La différence algébrique qui compose le dénominateur est une somme arithmétique, puisque $F(a)$ est négatif. On voit que, pour effectuer la correction, il suffit de connaître les résultats de la substitution de a et $a+h$ dans le premier membre de l'équation, et que les corrections successives donneront des valeurs approchées par excès de la racine exacte.

Quant à la rapidité de l'approximation, la figure montre que l'erreur RC, commise après la correction, est de même ordre que la flèche de l'arc MN, et, par conséquent, du second ordre relativement à la corde MN ou à sa projection AB, en d'autres termes, l'erreur est de l'ordre du carré de h; en sorte que si h est du n^e ordre décimal, l'erreur résultant de la correction sera du $2n^e$ ordre décimal, et on ne devra conserver dans la valeur corrigée que les décimales d'ordre inférieur.

L'examen des divers cas qui peuvent se présenter va nous conduire à des caractères algébriques qui fixeront le sens de la correction. La courbe ne peut, en effet, présenter que les quatre formes suivantes :

fig. 2



Considérons les signes de $F'(x)$ et de $F''(x)$ dans l'intervalle h, et indiquons par le signe $\pm$ le sens de la correction, selon qu'elle a pour résultat de fournir une valeur supérieure ou inférieure à la valeur exacte.

A l'inspection des figures on peut former le tableau suivant :

Fig.	$F'(x)$	$F''(x)$	Correction.
1	+	—	+
2	+	+	—
3	—	—	—
4	—	+	+

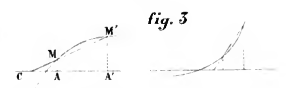
D'où il résulte que si F' et F'' sont de même signe pour $x = a$, la valeur corrigée est approchée par défaut; si F' et F'' sont de signes contraires, la valeur corrigée est approchée par excès. En sorte que le tracé des figures qui précède est inutile pour le calcul, et l'on peut formuler la règle suivante :

Lorsque deux nombres a *et* b *comprennent une racine d'une équation, si* A *et* B *représentent les valeurs absolues des résultats de la substitution de ces deux nombres dans le premier membre, on obtient une valeur plus approchée de la racine en augmentant le plus petit des deux nombres de la qualité*

$$\frac{(b-a)\,A}{A+B}.$$

La substitution de la nouvelle valeur servira de la même manière à calculer une seconde valeur plus approchée. Les exemples nombreux traités § 141 et suivants, montreront qu'à l'aide d'un petit nombre de substitutions convenablement dirigées, on obtient rapidement des valeurs très-approchées des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

Lorsque deux nombres donnent des résultats de même signe, on peut néanmoins faire une correction à l'aide des résultats de leur substitution s'ils sont voisins de la racine, mais elle n'a pas la certitude qui résulte des conditions précédentes.



On peut, en effet, calculer une correction AC à l'aide des deux triangles AMC, A'M'C, qui donnent

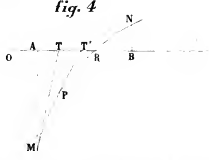
$$AC = AA' . \frac{AM}{A'M' - AM}$$

et les figures montrent que, par une suite de corrections analogues, on peut encore avoir une valeur aussi approchée que l'on voudra de la racine.

La méthode de correction qui vient d'être exposée porte le nom de *méthode des parties proportionnelles.*

Des considérations analogues vont nous conduire à un autre procédé de correction, désigné sous le nom de *Méthode de Newton.*

138. *Méthode de Newton.* Soient toujours a et $a+h$ deux valeurs comprenant une racine de $F(x) = 0$, et supposons que la fonction $F(x)$ satisfasse dans l'intervalle h aux conditions précédemment définies § 137. Menons au point M la tangente MT;



elle détermine à partir du point A une longueur AT, que nous prendrons pour valeur approchée de la correction exacte AR; en calculant la valeur TP de la fonction pour $x = OT$, on

pourra faire une nouvelle correction et ainsi de suite, on obtiendra des valeurs de plus en plus approchées de la racine.

Pour avoir l'expression de la correction AT, remarquons que

$$AT = \frac{AM}{\text{tg}\,ATM} = -\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Pour la calculer, il ne suffit pas de former F (a) et F′ (a).

En effet, pour que le tracé de la tangente donne un point compris entre A et B, il n'est point indifférent de la mener en M ou en N, la tangente menée en N pouvant couper l'axe des x à gauche du point A. L'examen des diverses formes que peut présenter la courbe représentant le premier membre de l'équation (§ 137), montre que la tangente doit être menée à celui des points M ou N, pour lequel F (x) et F″ (x) sont de même signe, en sorte qu'il faudra choisir d'abord le point de départ a ou $a + h$ de la correction, choix que ne nécessite pas la méthode précédente.

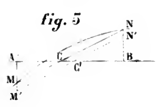
Remarquons toutefois que la correction de Newton est de sens contraire à celle que fournit la méthode des parties proportionnelles, ainsi que l'indiquent les figures; de sorte que si on emploie concurremment les deux procédés, la racine est toujours comprise entre les valeurs approchées qu'ils fournissent. D'ailleurs la rapidité de l'approximation est la même, car l'erreur TC de la correction est du second ordre relativement à h et pour des raisons semblables à celles données plus haut.

139. *De l'approximation que l'on doit atteindre dans le calcul des substitutions.*

Soit une équation

$$F(x) = 0.$$

Soient a et $a + h$ deux valeurs qui comprennent une racine de $f(x) = 0$ et que l'on doit substituer dans F (x) pour avoir une valeur plus approchée de la racine, soit par la méthode des parties proportionnelles, soit par celle de Newton. Il est aisé de voir qu'il suffira de connaître F (a) et F $(a + h)$ avec l'approximation même que l'on peut obtenir par la correction. En effet, on voit sur la figure 5



que l'erreur CC' qui résulte des erreurs MM', NN' commises sur F (a) et F $(a + h)$ est de même ordre que ces erreurs; si donc par la correction on veut avoir une valeur approchée de la racine avec une erreur de l'ordre de h^2, il faut calculer avec cette même approximation les résultats des substitutions. Il sera bon toutefois de prendre une décimale de plus pour assurer l'exactitude de la correction.

140. *De la manière d'effectuer les substitutions.* Nous avons vu (§ 99), lorsque l'équation est algébrique, comment on y substitue des nombres simples; ces substitutions ont pour but de séparer les racines. Celles que nous avons à effectuer sont plus pénibles. Or, la première correction obtenue à l'aide des substitutions des deux nombres entiers qui comprennent la racine donnera une valeur approchée évaluée en dixièmes et qu'il faut substituer à son tour. On pourra employer à cet effet la table des puissances des nombres (Tab. IV) et on aura le résultat cherché par des calculs faciles si les coefficients des divers termes sont simples. Dans le cas contraire, on emploiera le procédé de la multiplication abrégée ou bien les logarithmes. Lorsqu'on sera parvenu à connaître la racine avec un certain nombre de décimales, quatre par exemple, on pourra calculer le résultat de la substitution de deux nombres voisins de la racine par la formule approchée

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a),$$

ce qui exige la substitution du nombre a dans la fonction F'. On voit que le calcul sera presque aussi long que celui de la substitution directe de $a + h$ dans $f(x)$, et cette dernière a

l'avantage de s'effectuer par une série de calculs dont on a le tableau fait.

Lorsque l'équation sera transcendante, on emploiera également les tables V et VI ou des calculs directs quand leur petite étendue ne permettra pas de s'en servir, à moins que par un changement d'inconnue la grandeur de la racine ne rentre dans les limites entre lesquelles elles sont construites.

Généralement, on voit qu'il conviendra d'effectuer directement chaque substitution dans le premier membre de la proposée, et qu'il y aura peu d'avantage à se servir des substitutions déjà faites. On profitera seulement de la forme de l'équation pour faciliter le calcul des substitutions, comme on le voit, dans les exemples donnés plus loin.

Quant à l'ordre à suivre dans les substitutions, on pourra procéder comme il suit :

1° La substitution des nombres a et b donnera une première correction, c'est-à-dire une nouvelle valeur $OC = b'$ (fig. 1); a et b' en donneront une seconde b'', a et b'' en fourniront une autre b''', et ainsi de suite.

2° Ayant trouvé la seconde valeur b', on substituera un nombre a' plus grand que a et plus petit que b'. Si le résultat est de signe contraire à celui que donne b', les nombres a' et b' serviront de nouveau point de départ, et on pourra continuer de l'une ou l'autre manière. Si a' et b' donnent des résultats de même signe, on pourra néanmoins faire une nouvelle correction qui fournira une valeur dont la substitution donnera un résultat de même signe ou de signe contraire à ceux qu'ont donnés a' et b' (fig. 3); s'il est de signe contraire, on retombe sur le premier cas; s'il est de même signe, on pourra employer a' et b' à une nouvelle correction b'', puis a' et b'', et ainsi de suite.

Quel que soit l'ordre suivi, on voit aisément que les corrections successives donneront généralement un nombre de décimales double de celui qui a déjà été obtenu.

En effet, nous avons déjà vu (§ 137) que $F(a+h)$ et $F(a)$

étant de même ordre et de signe contraire, l'erreur, après une première correction qui donne b', est de l'ordre de h^2. Si on fait une nouvelle correction à l'aide de a, b', AM $=$ F (a) et CP $=$ F (b'), (fig. 1); comme CP est de l'ordre de CR, c'est-à-dire de l'ordre de h^2, la seconde correction

$$CC' = AC \frac{CP}{AM}$$

sera de l'ordre de h^3 et, par conséquent, l'erreur sera de l'ordre de h^4 et ainsi de suite. Les exemples suivants montreront comment il convient de diriger les calculs.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

Nous allons appliquer à quelques exemples les méthodes que nous avons exposées.

I.

Équations algébriques.

141. *Exemple* I. Lorsqu'on étudie la résistance d'une poutre supportée par quatre appuis, on rencontre l'équation

$$u = 14x^3 + 12x^2 - 9x - 10 = 0.$$

On voit qu'elle n'a qu'une racine positive comprise entre 0 et 1.

Application de la méthode algébrique. La racine étant entre 0 et 1, substituons 0, 5, on a un résultat négatif $-$ 9,75; d'ailleurs 1 donne $+$ 7; on écrira ces résultats comme il suit:

x	u	Correction.
0,5	$-$ 9,75	0,3
1,0	7,00	

On fera une correction par la méthode des parties propor-

tionnelles, ce qui donne 0,8. On substituera donc 0,8, ce qui fera reconnaître que l'on doit substituer un nombre plus grand 0,9; on obtient ainsi les résultats suivants:

0,8	— 2,352	0,06
0,9	1,826	

qui donnent pour correction 0,06, et de là les substitutions suivantes:

0,86	0,03998	
0,85	— 0,38225	0,0090.

En se bornant à 4 décimales, on a pour x la valeur

$$x = 0{,}8590,$$

que l'on doit regarder comme exacte, à moins d'un dix-millième; s'il est nécessaire d'en avoir la certitude, on substituera 0,8590, qui donne un résultat négatif, puis 0,8591, et comme on obtient un résultat positif, le nombre obtenu est exact à moins d'un dix-millième.

Application de la méthode graphique. Dans ce cas on doit trouver le point ou la parabole $y = x^2$ coupe l'hyperbole

$$14\,xy + 12\,y - 9\,x - 10 = 0.$$

Pour cela on construit un point de l'hyperbole et les deux asymptotes

$$x = -\frac{12}{14} = -0{,}857$$

$$y = \frac{9}{14} = 0{,}643;$$

il est aisé alors de construire deux points de l'hyperbole voisins de la parabole; en prenant cinq centimètres pour unité, on mesure aisément la valeur approchée

$$x = 0{,}86,$$

et deux substitutions donnent x avec quatre décimales.

142. *Exemple* II. Dans la même question se présente l'équation

$$u = 7\,x^4 + 20\,x^3 + 3\,x^2 - 16\,x - 8 = 0.$$

Comme la précédente, elle n'a qu'une racine positive, comprise entre 0 et 1, ce qui conduit aux substitutions suivantes :

x	u	Correction.
0,5	— 12,3	0,6
1,0	6,0	
0,9	— 0,7973	0,012
0,912	— 0,08117	0,00135
0,914	0,03843	
0,91335.		

$x = 0,91335$ est la racine approchée à moins d'un cent millième. Observons que la première correction 0,6 aurait conduit à substituer un nombre plus grand que 1; on a donc dû diminuer de 0,2 la grandeur de cette correction, puisque l'on sait que la racine est moindre que 1. On a aussi calculé la substitution de 0,9 avec une exactitude plus grande qu'il n'était nécessaire pour calculer la correction en y joignant le résultat de la substitution de 1; mais cette approximation a été utile pour le calcul d'une correction nouvelle résultant de la substitution de 0,912. C'est ainsi que, pour les corrections qui suivent celle que l'on a en vue, il est souvent utile de calculer la substitution d'un nombre avec plus d'exactitude qu'il n'est indiqué *a priori*.

143. *Exemple* III. Quelquefois la forme particulière d'une équation permet de rendre plus simple le calcul des substitutions. Soit l'équation déjà considérée (§ 106)

$$x^7 - 4x^4 + x^3 - 2 = 0.$$

Nous avons vu qu'elle a une racine entre 1,2 et 1,6; une correction donne 1,50; mettons l'équation sous la forme

$$\lg x^4 + \lg (4 - x^3) - \lg (x^3 - 2) = 0.$$

Si on pose $x^3 = z$, z sera compris entre 2 et 4, l'équation devient

$$u = \frac{4}{3} \lg z + \lg (4 - z) - \lg (z - 2) = 0,$$

et puisque la valeur de x est voisine de 1,50, x^2 est voisin de 3,37, ce qui conduit au tableau des substitutions indiquées ci-dessous.

z	u	Correction.
3,37	0,366	
3,38	0,357	0,4
3,70	0,004275	0,003
3,75	—0,079	
3,703	—0,000387	—0,00025
3,70275		

A la valeur $z = 3{,}70275$ correspond pour x la valeur 1,54706, approchée à moins d'un cent-millième.

II.

Équations transcendantes.

144. *Exemple* IV. Calculer les racines de l'équation

$$\sin 2x + \sin x = x.$$

Nous avons vu (§ 109) que cette équation a une racine entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. Pour en approcher d'avantage, mettons l'équation sous la forme

$$\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

puis posant $\frac{x}{2} = z$ et remarquant que l'arc z s'exprime en secondes par $z = \frac{\pi}{648000} z''$, il vient

$$\sin 3z \cos z = \frac{\pi}{648000} z$$

z désignant maintenant un nombre de secondes. Prenons les logarithmes des deux membres, il faut rendre nulle la fonction

$$u = \lg \sin 3z + \lg \cos z - \lg z + \text{ctlg} \frac{\pi}{648000} - 10.$$

Or, x étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$, z sera compris entre 30° et 45°. Substituons la moyenne 38°. Nous sommes conduits aux substitutions suivantes :

z	u	Correction.
38° = 136800″	0,0356013	
40° = 144000″	— 0,0221528	1° 15′
39° 15′ = 141300″	0,0001813	
39° 16′ = 141360″	— 0,0003058	22″, 3
39° 15′ 22″	0,0000027	
39° 15′ 23″	— 0,0000054	0″,03

Aussi $z = 39° 15' 22'',3$, d'où $x = 78° 30' 44'',6$.

145. *Exemple* V. Nous avons vu (§ 110) que l'équation

$$\frac{1}{x} = \lg x + \frac{\cos x}{x}$$

a une seule racine comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$. Mettons l'équation sous la forme

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} x = x \lg x,$$

remplaçons x par $\frac{\pi x}{648000}$ et prenons les logarithmes des deux membres, nous aurons à résoudre l'équation

$$u = \lg 2 + 2 \lg \sin \frac{x}{2} - \lg kx - \lg\lg kx = 0,$$

k désignant le nombre $\frac{\pi}{648000}$.

Substituant d'abord une moyenne entre 180° et 270°, on forme successivement le tableau suivant :

x	u	Correction.
225° = 810000″	— 0,1356296	
200° = 720000″	0,0101000	1° 50′
201° 50′ = 726600″	0,0004132	4′ 41″
201° 54′ 41″ = 726881″	— 0,0000024	— 1″,62

d'où $x = 201^\circ\ 54'\ 39'',3.$

146. *Exemple* VI. Trouver la plus petite racine de l'équation

$$2^x = x \operatorname{tg} x.$$

On voit qu'elle a une racine un peu supérieure à 1. Pour la calculer, prenons les logarithmes et exprimons x en secondes, il vient

$$kx \lg 2 - \lg kx - \lg \operatorname{tg} x = 0.$$

L'arc égal à 1 étant de 57° environ, substituons 60°. Nous formons le tableau suivant :

x	z	Correction.
$60^\circ = 216000''$	$+0,05655$	
$61^\circ = 219600''$	$+0,03703$	2°
$63^\circ = 226800''$	$-0,0030530$	$-9'$
$62^\circ\ 51' = 226260''$	$+0,0000003$	$-0'',05$

Ainsi $x = 62^\circ\ 50'\ 59'',95.$

147. *Exemple* VII. Étant donnée une hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$, calculer l'abscisse du pied de l'ordonnée qui détermine entre les asymptotes un triangle dont l'aire soit double de celle du segment hyperbolique limité à la même ordonnée.

L'équation du problème est

$$x\sqrt{x^2-1} - l\,(x + \sqrt{x^2-1}) = \frac{x^2}{2}$$

La construction de l'hyperbole montre que la racine est peu inférieure à 2.

Nous avons vu (§ 135) que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{M}\,(z+1)\,(z-3) = 4z \log z,$$

en posant $x + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{z}$, M désignant le module 0,434....

En prenant les logarithmes, on a l'équation

$$u = \lg(z+1) + \lg(z-3) - \lg z - \lg \operatorname{tg} z - 0,9642758.$$

Comme x est voisin de 2, z est voisin de 12, d'où les calculs qui suivent :

z	u	Correction.
12	$-0{,}00836$	0,27
12,5	0,00670	
12,27	$-0{,}0007649$	0,0045
12,28	0,0001646	
12,2745	$-0{,}0000005$	0,000016
12,2746	0,0000026	

donc $z = 12{,}27462,$

par suite $x = 1{,}89446.$

148. *Exemple* VIII. Une corde est fixée à deux points situés à la même hauteur et distants de 50 mètres. Quelle doit être la longueur de la corde pour que la flèche de l'arc soit de 7 mètres ?

La mécanique donne pour résoudre ce problème les deux relations suivantes :

$$f = \frac{u}{2}\left(e^{\frac{a}{u}} + e^{-\frac{a}{u}}\right) - u$$

$$L = u\left(e^{\frac{a}{u}} - e^{-\frac{a}{u}}\right)$$

dans lesquelles f désigne la flèche, $2a$ la distance des deux points et L la longueur de la corde.

On peut tirer u de la première et à l'aide de la seconde avoir L ou bien éliminer u entre les deux équations. Or, on a :

$$e^{\frac{a}{u}} = \frac{L + 2f}{L - 2f},$$

en sorte que l'équation à résoudre dans le cas actuel est

$$l\,\frac{L + 2f}{L - 2f} = \frac{8af}{L^2 - 4f^2}.$$

Mettant pour f et a leurs valeurs, on a

$$l\,\frac{L + 14}{L - 14} - \frac{1400}{(L + 14)(L - 14)} = 0.$$

Soit $\frac{L + 14}{L - 14} = x$, d'où $L = 14\,\frac{x + 1}{x - 1}$, il vient

$$lx = \frac{25}{14}\frac{(x-1)^2}{x}.$$

Pour trouver une première valeur approchée, posons $y = lx$, x sera égale à l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'hyperbole

$$y = \frac{25}{14}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right).$$

Construisons l'asymptote

$$y = \frac{25}{14}(x-2),$$

puis l'hyperbole dans le voisinage du point d'intersection de l'asymptote avec $y = lx$; la mesure de l'abscisse du point de rencontre des deux courbes donne $x = 1{,}73$.

Pour employer le calcul, introduisons les log. vulgaires, on a

$$u = \lg x - 0{,}775525\,\frac{(x-1)^2}{x}.$$

Substituons 1,73, nous formerons le tableau suivant :

x	z	Correction.
1,73	— 0,00084	— 0,0031
1,72	+ 0,00178	
1,7269	— 0,0000202	
1,7268	+ 0,0000041	

d'où

$$x = 1{,}7268$$

et

$$L = 14\,.\,\frac{2{,}7268}{0{,}7268}\,. = 52{,}524.$$

Si on avait voulu calculer u à l'aide de la première équation, on voit aisément qu'en posant $\frac{a}{u} = x$, x aurait pu être déterminé par l'intersection de la courbe

$$y = e^{x} + e^{-x}$$

avec la droite

$$y = \frac{2f}{a}x + 2.$$

Remarque. Nous avons fait chaque correction par la méthode des parties proportionnelles, parce qu'il n'est besoin de faire aucun examen de la marche de la fonction F (x) dans l'intervalle des nombres a et b, tandis que la méthode de Newton non-seulement exige un examen préalable, ainsi qu'on l'a vu, mais devient inapplicable si, dans le cas où il y a inflexion, F (x) et F'' (x) sont de signes contraires pour $x = a$ et pour $x = b$.

CHAPITRE VII.

RECHERCHE DES RACINES D'UNE ÉQUATION DE LA FORME

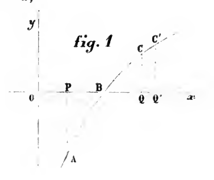
$$\int_a^x f(x)\,dx = 0.$$

149. On peut avoir à résoudre une équation dont le premier membre est une intégrale prise entre deux limites, l'une déterminée a, l'autre indéterminée x, et qu'il s'agit de calculer de façon qu'entre les limites a et x

$$\int_a^x f(x)\,dx = 0.$$

On résoudra aisément la question par le procédé suivant; la longueur des calculs dépendra surtout de l'approximation que l'on veut obtenir.

Construisons la courbe $y = f(x)$, soit ABC la figure obtenue et OP $= a$;



la courbe aura nécessairement des points au-dessous de Ox, sans quoi l'intégrale ne pourrait être nulle. La courbe étant exactement construite, déterminons approximativement un point C, tel que l'aire BCQ, variable avec la position du point C, soit sensiblement équivalente à l'aire fixe ABP. Puis calculons les deux aires ABP, BCQ, soit en les décomposant en trapèzes, soit en employant la méthode de Poncelet ou de T. Simpson. Soient S et S' les deux aires approchées. Prenons la différence $S - S' = D$. Si cette différence est graphiquement appréciable, on fera immédiatement une correction à la position du point C; si elle est petite, on calculera la correction à faire à l'abscisse du point C, et voici comment.

Soit $OQ' = b + h$ l'abscisse dont on a la valeur approchée b, on a dans la figure

$$CC'QQ' = D = hy + \frac{h^2y'}{2.} + \varepsilon.$$

ε étant d'ordre inférieur à h^2, d'où

$$h = \frac{D}{y}$$

avec une erreur de l'ordre du carré de h. Toutefois, il faut remarquer que si δ est l'erreur résultant du calcul des deux termes S et S' de la différence D, l'erreur commise sur h ne peut être inférieure à $\frac{\delta}{y}$; en sorte que l'erreur commise sur la racine cherchée est du même ordre que l'erreur commise dans l'évaluation des aires, à moins que y ne soit ou très-grand ou très-petit.

150. Appliquons cette méthode à l'équation

$$\int_0^x \left(\frac{\sin x}{x} - x\right) dx = 0.$$

Construisons la courbe

$$y = \frac{\sin x}{x} - x$$

et pour cela calculons le tableau suivant des valeurs de y pour des valeurs de x distantes de $\frac{\pi}{20}$.

x	y
0,0	1
0,157079	0,838817
0,314159	0,669473
0,471239	0,492158
0,628318	0,307172
0,785398	0,114917
0,942478	− 0,084283
1,099557	− 0,289225
1,256637	− 0,499811
1,413717	− 0,715071
1,570796	− 0,934177
1,727875	− 1,156255

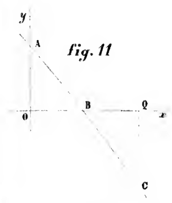


fig. 11

L'évaluation de l'aire AOB donne S = 0,4543, et cette valeur est approchée à moins de 0,0001. Cette limite de l'erreur est déterminée en évaluant pour l'un des trapèzes l'erreur commise dans la portion de la courbe où cette erreur est la plus grande, et assimilant le segment curviligne négligé à un segment parabolique.

La forme de la courbe indique sans peine une position approchée de l'ordonnée inconnue, et on voit que l'abscisse cherchée doit être peu éloignée de 1,72787.... ou $\frac{11\pi}{20}$. Le calcul de l'aire BCQ donne S' = 0,4839 avec la même approximation que précédemment, la différence

$$S - S' = -0,0296;$$

il faut donc diminuer OQ d'une quantité $h = \frac{D}{y} = \frac{0,0296}{1,1562} =$ 0,0256, d'où

$$x = 1,7022$$

Calculons l'ordonnée pour cette valeur de x, qui correspond à 97° 31′ 44″, il vient $y_1 = 1,119790$ et $hy = 0,0307$, l'aire diminuée de hy devient 0,4532; elle diffère encore de S de

8

0,0011, ce qui donne lieu à une nouvelle correction $h_1 = \frac{D_1}{y_1}$
$\frac{0,0011}{1,1198} = 0,0009$ et

$$x = 1,7031,$$

valeur approchée à moins de 0,0001. Pour avoir une approximation plus grande, il faut calculer les aires avec plus d'exactitude, puisque nous avons vu que l'approximation dans le calcul de la racine était du même ordre que l'erreur commise dans l'évaluation des aires.

LIVRE IV.

DES DIFFÉRENCES ET DE L'INTERPOLATION.

CHAPITRE I.

DES DIFFÉRENCES.

151. Étant donnée une suite de nombres, limitée ou illimitée

$$(u) \qquad u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \ldots\ldots$$

Si on retranche chaque nombre de celui qui le suit, on forme une nouvelle suite

$$u_1 - u_0 \quad u_2 - u_1 \quad u_3 - u_2 \ldots\ldots$$

dont les termes sont ce que l'on nomme les différences premières de la suite u et que l'on écrit

$$(\Delta u) \qquad \Delta u_0 \quad \Delta u_1 \quad \Delta u_2 \ldots\ldots$$

La suite (Δu) donne de même naissance à une nouvelle suite de différences

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 \quad \Delta u_2 - \Delta u_1 \ldots\ldots$$

qu'on nomme les différences secondes de la suite (u) et que l'on écrit

$$(\Delta^2 u) \qquad \Delta^2 u_0 \quad \Delta^2 u_1 \ldots\ldots$$

On forme de même les différences premières de $(\Delta^2 u)$ ou les différences troisièmes de (u), et ainsi de suite.

D'après cela le terme général de la série des différences de l'ordre n sera

$$\Delta^n u_p$$

et sa liaison aux différences de l'ordre $n-1$ est définie par la relation

$$\Delta^n u_p = \Delta^{n-1} u_{p+1} - \Delta^{n-1} u_p.$$

Si la suite u renferme $n + 1$ termes, la suite Δu en renfermera n, la suite $\Delta^2 u$ en contiendra $n-1$, etc.... La suite $(\Delta^n u)$ n'en aura qu'un.

152. Remarquons qu'en regardant les indices de u et de Δ comme des exposants, la relation précédente reste vraie quand on multiplie les deux membres par une puissance entière de u ou de Δ, et, par suite, elle est encore exacte en multipliant les deux membres par une fonction entière de u ou de Δ, ou de u et Δ, pourvu qu'après la multiplication on rende aux exposants leur sens primitif d'indices. En un mot, Δ et u peuvent être considérés comme des facteurs.

153. D'après cela la relation précédente, réduite à sa forme la plus simple, est

$$\Delta = u - 1 \quad \text{ou} \quad u = 1 + \Delta.$$

Il en résulte en élevant à la puissance n,

$$\Delta^n = (u-1)^n = u^n - n u^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1.}{1.2 \ldots n} u^0$$

$$u^n = (1+\Delta)^n = 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1.}{1.2 \ldots n}\Delta^n$$

Multiplions par u_p et rétablissons les indices, il vient en supposant $p = o$, ce qui ne diminue pas la généralité de la formule,

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2 \ldots n} u_0,$$

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2 \ldots n}\Delta^n u_0.$$

D'où l'on voit que l'on pourra soit calculer successivement les différences des divers ordres, étant donnés u_0, u_1.... u_n et, réciproquement, u_1, u_2.... u_n connaissant u_0, Δu_0.... $\Delta^n u_0$; soit calculer directement à l'aide des formules ci-dessus $\Delta^p u_0$ ou u_p, p étant plus petit que n.

Lorsque le calcul se fait successivement, on le dispose comme il suit :

Soient donnés u_0, Δu_0.... $\Delta^5 u_0$, ou u_0, u_1.... u_5

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$	$\Delta^5 u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_1$	$\Delta^4 u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	$\Delta^3 u_2$		
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$			
u_4	Δu_4				
u_5					

On écrit en ligne verticale les nombres donnés, on retranche chacun d'eux de celui qui le suit et on écrit le résultat à droite du nombre retranché, on obtient ainsi la colonne Δ, à l'aide de celle-ci la colonne Δ^2, etc.

Ce tableau montre en même temps comment, à l'aide de u_0, Δu_0.... $\Delta^5 u_0$, on pourra calculer les diverses lignes horizontales, en ajoutant à chaque terme celui qui le suit, ce qui fournira le terme placé au-dessous du premier d'entre eux. On arrivera ainsi à u_5.

Voyons maintenant dans quelles circonstances on aura à effectuer de semblables calculs.

154. *Applications.* Lorsqu'on donne une suite de $m + 1$ nombres

(1) $$u_0 \; u_1 \; u_2 \; .... \; u_m,$$

il peut arriver que la loi de la succession de ces nombres ne puisse être aperçue et que dans la suite des différences (Δ^n) on observe une loi qui permette de prolonger cette suite autant qu'on le veut, et, par suite, de prolonger ainsi Δ^{n-1}, Δ^{n-2}.... et, enfin (1), autant qu'il est nécessaire.

Exemple. Soit donnée la suite des 6 nombres

2 3 8 21 40 91.

On pourra à l'aide de ces nombres former le tableau suivant :

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
2	1	4	4	4	4
3	5	8	8	8	
8	13	16	16		
21	29	32			
50	61				
111					

La loi des différences secondes est évidente ; elle suit une progression géométrique dont la raison est 2 ; on peut la prolonger, et, par suite, la suite Δ et la suite u.

Si on veut avoir l'expression générale d'un terme quelconque u_n, il faut appliquer la formule donnée en remarquant que $\Delta^3 u_0 = \Delta^4 u_0 = \dots = 4$, d'où

$$u^n = 2 + n + 4\left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots + 1\right).$$

Or,

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \dots + 1,$$

par suite

$$u_n = 2 + n + 4(2^n - 1 - n)$$
$$u_n = 2^{n+2} - 3n - 2.$$

En donnant à n toutes les valeurs entières positives ou négatives, on aura tous les termes de la suite (u) prolongée.

Supposons que n ne soit plus assujetti à être entier et désignons par x la valeur variable de n, la fonction

$$y = 2^{x+2} - 3x - 2$$

jouira des propriétés suivantes :

1° Elle prendra les valeurs données 2, 3, 8, 21, 50, 111 pour $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

2° Elle fera connaître pour toute valeur de x la valeur de la fonction satisfaisant à la loi qui résulte des données.

Une formule qui jouit de ces propriétés est une formule d'interpolation.

Avant de nous occuper de la recherche des formules qui remplissent les conditions précédentes, signalons une propriété importante des fonctions entières et qui consiste en ce que :

155. *Si des nombres* u_0, u_1, $u_2 \ldots$ u_n *sont les résultats de la substitution de valeurs équidistantes de la variable* x_0, x_1, $x_2 \ldots$ x_n *dans une fonction entière de degré* m, *la différence d'ordre* m *est constante.*

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que si h désigne la différence des deux valeurs successives de x, la différence des résultats de la substitution de ces valeurs dans la fonction $u = f(x)$ sera représentée quel que soit x par

$$\Delta u = f(x+h) - f(x)$$

ou

$$\Delta u = hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots - = f_1(x),$$

d'où l'on voit que l'expression de Δu sera d'un degré inférieur d'une unité à celui de la fonction u.

La différence seconde de u étant la différence première de Δu, aura pour expression

$$\Delta^2 u = f_1(x+h) - f_1(x)$$

ou

$$\Delta^2 u = hf_1'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f_1''(x) + \ldots = f_2(x),$$

elle sera d'un degré inférieur de deux unités à celui de u, et ainsi de suite. $\Delta^m u$ sera d'un degré inférieur de m unités à celui de u, c'est-à-dire indépendant de x. Sa valeur sera donc constante, par suite $\Delta^{m+1} u$ sera nul.

Cette propriété est fort utile quand on a besoin de calculer les valeurs d'une fonction entière pour une longue série de valeurs de la variable en progression arithmétique. Il suffit alors de calculer directement les valeurs de cette fonction supposée de degré m pour m valeurs x_0, $x_0 + h \ldots$ de la variable, on en déduit $m - 1$ différences premières, $m - 2$ différences

secondes, etc..... une différence $(m-1)^{ème}$. La différence $m^{ème}$ étant constante, ne peut dépendre que de la fonction donnée et de l'intervalle h des nombres substitués; et si l'on observe que la différence d'une somme est la somme des différences des termes dont elle se compose, on verra que la différence $m^{ème}$ d'un polynome ordonné, de degré m, ne dépend que du premier terme, car la différence $m^{ème}$ des termes qui suivent est nulle.

Pour en trouver l'expression, remarquons encore que la différence $(m-1)^{ème}$ de Δu ne dépend que du premier terme de Δu, que la différence $(m-2)^{ème}$ de $\Delta^2 u$ ne dépend aussi que du premier terme de $\Delta^2 u$ et ainsi de suite.

Or, le premier terme de Δu est la dérivée du premier terme de u, multiplié par h; soit Ax^m ce terme, on aura

$$mAx^{m-1}h$$

pour premier terme de Δu,

$$m(m-1)\cdot Ax^{m-2}h^2$$

pour premier terme de $\Delta^2 u$,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1.2.3\ldots\ldots mAh^m$$

pour $\Delta^m u$. Appliquons ces propriétés.

156. *Exemple.* Calculer les valeurs de la fonction

$$y = 4x^3 - 3x$$

pour des valeurs de x distantes de 0,02 à partir de $x = 1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1,0	0,184832	0,009792	0,000192
1,02	1,184832	0,194624	0,009984	0,000192
1,04	1,379456	0,204608	0,010176	0,000192
1,06	1,584064	0,214784	0,010368	
1,08	1,798848	0,225152		
1,10	2,024000			

On calcule directement le résultat de la substitution des trois premiers nombres 1, 1,02, 1,04, ce qui fournit les deux premiers termes de Δy et le premier terme de $\Delta^2 y$, et on forme

directement $\Delta^5 y = 1.2.3.4.\overline{0{,}02}^3$; on peut alors aisément continuer le tableau aussi loin que l'on voudra.

157. Lorsque les nombres u_0, u_1, u_2 ..... sont le résultat de la substitution de nombres équidistants dans une fonction quelconque, il n'arrivera pas en général que l'on découvre aucune loi dans la suite des différences d'un ordre quelconque, mais on observe que les différences d'un ordre assez élevé sont très-petites; en les regardant comme nulles, on suppose constantes les différences de l'ordre précédent. On peut alors opérer sur ce tableau comme s'il s'agissait d'une fonction entière et obtenir ainsi les valeurs approchées de la fonction pour une suite *limitée* de valeurs de la variable.

Supposons, pour fixer les idées, qu'en formant les différences successives des résultats de la substitution de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, on ait trouvé que les différences quatrièmes sont sensiblement constantes, négligeons les différences cinquièmes et prolongeons le tableau obtenu; ce qui fait connaître u_6, u_7.... u_{20}.... Il est clair que les erreurs commises sur u_6, u_7 .... iront généralement en croissant. Substituons directement x_{20}, soit v le résultat. Si la différence $v - u_{20}$ est d'un ordre supérieur à l'approximation dont on a besoin, on pourra admettre les résultats du calcul; si elle est de même ordre ou d'un ordre inférieur, il faudra, pour prolonger le tableau, effectuer une nouvelle série de substitutions successives destinées à donner un nouveau tableau, que l'on vérifiera comme le précédent.

CHAPITRE II.

DE L'INTERPOLATION.

158. Le but général de l'interpolation est de calculer les valeurs d'une fonction dont l'expression générale est inconnue, pour des valeurs de la variable voisines de valeurs particulières auxquelles correspondent des valeurs connues de la fonction.

Pour résoudre cette question, on cherche une fonction qui prenne les valeurs données pour les valeurs correspondantes de la variable, et à l'aide de cette fonction ainsi déterminée, on calcule les valeurs de la fonction inconnue pour des valeurs de la variable voisines de celles qui sont données. Un pareil problème est tout à fait indéterminé, et il y a une infinité de fonctions qui jouissent de la propriété demandée. Mais dans l'impossibilité où l'on est en général d'en fixer la forme, on se propose de déterminer une fonction algébrique entière qui satisfasse aux diverses conditions. Cette restriction n'est point encore suffisante ; ainsi les deux fonctions entières

$$9 + 36x^2 \quad \text{et} \quad 9 + 8x + 4x^3$$

prennent les mêmes valeurs pour $x = 0, 1, 2$. Il faut alors, pour que le problème ait une solution unique, le poser comme il suit : Trouver une fonction de degré m qui, pour $m + 1$ valeurs de la variable, prenne $m + 1$ valeurs données.

159. *Formule d'interpolation de Newton.* Considérons d'abord le cas où l'on connaît les valeurs

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots\ldots\ u_m$$

d'une fonction, correspondant à des valeurs de la variable en progression arithmétique

$$x_0,\ x_0 + h\ \ldots\ldots\ldots\ x_0 + mh;$$

formons les m différences Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots\ldots \Delta^m u_0$, et dans la formule indéfinie

$$u = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$

remplaçons n par $\dfrac{x - x_0}{h}$, il vient

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} +$$

$$\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x-x_0}{h} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \ldots + $$

$$\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} - (m-1)\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3..m},$$

et la fonction algébrique de degré m ainsi déterminée jouit des propriétés demandées. En effet, si on y donne à x les valeurs x_0, $x_0 + h$,.... le second membre devient u_0, u_1.... Cette fonction est unique, car deux fonctions de degré m, qui prennent les mêmes valeurs pour $m + 1$ valeurs de la variable, sont identiques. On pourra l'employer au calcul des valeurs de la fonction inconune pour des valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + mh$. Cette formule est due à Newton. Pour la calculer dans chaque cas, on formera d'abord Δu_0, $\Delta^2 u_0$,..... et pour abréger on remplacera $\frac{x - x_0}{h}$ par z.

160. *Formule d'interpolation de Lagrange.* Lorsque les valeurs de la variable auxquelles correspondent les m valeurs données de la fonction, ne sont pas équidistantes, on a recours à une autre formule.

Pour la déterminer, considérons la fonction

$$u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 .... + X_m u_m$$

où X_0, X_1.... désignent des fonctions de x; le second membre représentera la fonction cherchée si, pour $x = x_n$, toutes les fonctions X s'annullent, sauf X_n, et si en même temps X_n devient égal à 1.

Posons

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) .... (x - x_m)$$

et prenons

$$X_n = A_n \frac{f(x)}{x - x_n},$$

les premières conditions seront satisfaites; en outre, X_n doit être égal à 1 quand $x = x_n$, il faut donc que $\frac{1}{A_n}$ soit égal à la valeur du polynome entier $\frac{f(x)}{x - x_n}$ pour $x = x_n$

Or, on a (§ 15)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} + \frac{f(x)}{x - x_1} + ... + \frac{f(x)}{x - x_n} + ... + \frac{f(x)}{x - x_m}$$

faisant $x = x_n$, tous les termes du second membre s'annullent, sauf le quotient $\frac{f(x)}{x - x_n}$, et on voit que sa valeur est représentée par $f'(x_n)$, donc

$$A_n = \frac{1}{f'(x_n)}$$

et la formule cherchée est

$$u = \frac{f(x)}{x - x_0} \cdot \frac{u_0}{f'(x_0)} \cdot + \frac{f(x)}{x - x_1} \cdot \frac{u_1}{f'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_m} \cdot \frac{u_m}{f'(x_m)}.$$

Si l'on a uniquement pour but de l'employer au calcul, on mettra $f(x)$ en facteur et on aura

$$u = f(x) \left\{ \frac{A_0}{x - x_0} + \frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m} \right\}$$

A_0, A_1, A_2.... étant des nombres faciles à calculer. On calculera chaque terme de la parenthèse par logarithmes pour chaque valeur particulière de x, et la parenthèse calculée; on aura aisément $\lg u$.

Si la fonction n'a qu'un petit nombre de termes, il sera préférable de la mettre sous forme entière en effectuant les calculs.

Les calculs nécessaires pour l'établir sont pénibles, ainsi que son application. On verra plus loin qu'un tracé graphique pourra souvent la remplacer utilement.

Remarques. En se donnant *a priori* les conditions de forme que remplissent ces deux formules précédentes, on renonce à trouver des expressions souvent plus simples qui rempliraient le but que l'on a en vue.

Exemple. Supposons que pour les valeurs

$$0, 1, 2, 3$$

de la variable une fonction prenne les valeurs

$$6, 3, 2, \frac{3}{2}.$$

Pour appliquer la formule de Newton, calculons le tableau suivant :

u	Δ	Δ^2	Δ^3
6	-3	2	$-\frac{3}{2}$
3	-1	$\frac{1}{2}$	
2	$-\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$			

d'où

$$u_0 = 6,\ \Delta u_0 = -3,\ \Delta^2 u_0 = 2,\ \Delta^3 u_0 = -\frac{3}{2},\ x_0 = 0,\ h = 1,$$

et par suite

$$u = 6 - 3x + x(x-1) - \frac{x}{4}(x-1)(x-2)$$

ou

$$u = -\frac{x^3}{4} + \frac{7}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 6.$$

tandis que la fonction plus simple

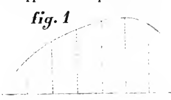
$$y = \frac{6}{x+1}$$

s'appliquerait beaucoup plus facilement au calcul.

L'emploi des formules précédentes résulte de l'impossibilité où l'on est de prévoir la forme la plus commode que l'on puisse adopter, et on en fait usage d'ordinaire quand leur degré est peu élevé et ne passe pas le troisième ou le quatrième, et seulement pour des valeurs de la variable comprises entre celles qui sont données ou très-voisines.

On a souvent besoin de représenter par une formule les résultats donnés par l'expérience dans des conditions définies. Mais cette formule n'est utile que si elle est l'expression d'une loi simple. Imaginons que l'on ait représenté graphiquement les valeurs de la fonction inconnue pour diverses valeurs de la variable que nous supposerons équidistantes.

fig. 1

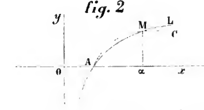


En joignant ces points par une série de cordes, nous obtiendrons un certain polygone et nous admettrons que les observations, qui ont donné la série des points figurés, correspondent à des valeurs de la variable assez voisines pour que la distance des points intermédiaires à la corde qui joint deux points successifs soit du second ordre par rapport à la longueur de la corde. Examinons la forme de cette courbe dans une étendue suffisante et comparons-la à différentes courbes représentant des fonctions simples, il pourra arriver que cette comparaison indique la fonction la plus propre à représenter la courbe tracée. Supposons, pour fixer les idées, que la forme de la courbe présente une grande ressemblance avec la logarithmique; posons alors

$$y = a \lg x,$$

l'origine étant choisie de façon que, pour $x = 1$, l'ordonnée de la courbe tracée soit nulle. Construisons la logarithmique à la même échelle, en prenant pour a une valeur telle que les ordonnées des deux courbes coïncident pour une certaine abscisse arbitraire α. Cette construction montrera la différence entre les ordonnées des deux courbes pour une abscisse quelconque.

fig. 2



Supposons qu'on ait obtenu la figure ci-jointe, dans laquelle AL est la logarithmique et AC la courbe donnée; on voit que l'ordonnée de la courbe AL est plus petite que celle de AC quand x est inférieur à α; le contraire a lieu quand x est supérieur à α.

Prenons alors

$$y = a \lg x + b\,(x - \alpha).$$

On pourra disposer de b de manière que les deux courbes aient un second point commun entre A et M ou à droite de M, soit β l'abscisse du second point commun. Si la fonction ainsi composée ne prenait pas encore pour les valeurs de x données des valeurs assez approchées de celles que prend la fonction inconnue, on ajouterait un nouveau terme de correction en prenant

$$y = alx + b(x - \alpha) + c(x - \alpha)(x - \beta)$$

et déterminant c de façon que les deux courbes aient un troisième point commun f.

Si la formule d'interpolation ainsi déterminée ne présentait pas encore une exactitude suffisante, le choix de la fonction $y = alx$ pour représenter la marche générale de la fonction inconnue serait défectueux.

161. *Substitution des tracés graphiques aux formules d'interpolation.* Les longueurs que présente le calcul d'une formule d'interpolation sont telles et son application est si pénible, qu'il est préférable d'y substituer des constructions graphiques. Nous allons en donner un exemple.

Proposons-nous de trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$4x^3 - 3x = a,$$

a désignant un paramètre arbitraire qui reçoit une série de valeurs positives distantes de 0,02 par exemple, à partir de 1.

On voit aisément que les valeurs de x qui satisfont à ces conditions sont plus grandes que 1 ; donnons à x une série de valeurs à partir de 1 et calculons les valeurs correspondantes de a, puis, au lieu de calculer à l'aide de ces substitutions une formule d'interpolation qui donne x en fonction de a, construisons une courbe en prenant x pour abscisse et a pour ordonnée, il est alors aisé de mesurer l'abscisse correspondant à telle ordonnée que l'on voudra dans les limites de l'épure.

Dans l'exemple particulier qui nous occupe, on aura des points suffisamment rapprochés pour le tracé en donnant à x

des valeurs distantes de 0,02, et les valeurs correspondantes de a s'obtiendront aisément par la méthode des différences (§ 156). C'est en construisant cette courbe à une échelle suffisante que la table VII a été obtenue. Observons que les erreurs de mesure peuvent être corrigées en prenant les différences des résultats obtenus et remarquant que leurs variations doivent présenter une certaine régularité.

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES QUI RENFERMENT UN PARAMÈTRE ARBITRAIRE.

162. On rencontre souvent dans les applications des équations qui renferment un paramètre arbitraire, en sorte que pour chaque valeur de ce paramètre il faut résoudre une équation particulière.

Nous allons voir sur quelques exemples comment on peut former des tables pour la résolution de ces sortes d'équations.

163. *Exemple* I. *Équation du troisième degré.* J'emprunterai à M. Sarrus une transformation très-élégante qui ramène toute équation du troisième degré à ne dépendre que d'un seul paramètre, en lui donnant la forme trigonométrique

$$4x^3 - 3x = a,$$

a désignant un nombre positif.

En effet, l'équation du troisième degré peut toujours, par l'évanouissement du second terme, se ramener à l'une des formes

$$y^3 - py + q = 0$$
$$y^3 + py + q = 0$$

en échangeant, s'il est nécessaire, y en $-y$.

1° Supposons d'abord que l'équation soit

$$y^3 - py + q = 0,$$

posons

$$y = -2x\sqrt{\frac{p}{3}};$$

substituant et divisant par $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, il vient

$$4x^3 - 3x = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

2° Si l'équation est

$$y^3 + py + q = 0,$$

posons

$$y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}(x^2 - 1).$$

Substituant et divisant par $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, on a

$$(4x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}} = 0.$$

Isolant le radical et élevant au carré, il vient

$$(4x^2 - 1)^2(x^2 - 1) = \frac{27q^2}{4p^3}$$

ou

$$(4x^3 - 3x)^2 - 1 = \frac{27q^2}{4p^3}$$

et enfin

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 + \frac{27q^2}{4p^3}}.$$

On voit que ces transformations supposent seulement $p > 0$.

Passons maintenant à la construction d'une table qui fasse connaître la valeur de x pour chaque valeur particulière de a. Pour cela procédons comme il a été dit (§ 161) : construisons à une échelle suffisante la courbe

$$y = 4x^3 - 3x,$$

et mesurons les valeurs de x correspondantes à des valeurs

données de y; on obtient ainsi les tables VII, dans lesquelles α et β désignent deux racines de même signe.

Pour faire une application de ces tables, soit l'équation :

$$y^3 - 10y + 5 = 0.$$

On a dans ce cas $a = 0{,}411$; à cette valeur correspondent dans la table les nombres

$$0{,}141, \quad 0{,}787, \quad 0{,}927.$$

Multiplions-les par $2\sqrt{\frac{p}{3}} = 3{,}652$, il vient pour les valeurs d'y en tenant compte des signes

$$0{,}514, \quad 2{,}873, \quad -3{,}386.$$

164. La transformation dont M. Sarrus a fait usage dans le cas où p est négatif, peut s'appliquer à toute équation de la forme

$$y^m \pm py \pm q = 0.$$

Si l'on a seulement en vue de la ramener à une équation qui ne renferme qu'un paramètre arbitraire, on peut obtenir une forme plus simple en posant :

$$y = kx\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}},$$

ce qui donne

$$k^m x^m . \frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}} \pm kx . p\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}} + q = 0,$$

divisant par

$$k^m \frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}, \text{ et prenant } k = \sqrt[m-1]{m},$$

il vient

$$x^m \pm x \pm \frac{q}{p\sqrt[m-1]{p}} = 0.$$

ou

$$x^m \pm x \pm a = 0.$$

Si p et q dépendent d'un seul paramètre, cette transforma-

tion ne sera pas nécessaire et on pourra opérer comme dans l'exemple suivant.

165. *Exemple* II. *Détermination du diamètre d'un tuyau de conduite.* Dans un certain cas particulier, on rencontre en hydraulique l'équation

$$D^6 - AD - 0{,}0255\,A = 0$$

pour déterminer le diamètre D d'un tuyau de conduite, A étant un nombre positif compris entre 0 et 1. (Bresse, *Hydraulique.*)

Pour construire une table propre au calcul de D, résolvons cette équation par rapport à A,

$$A = \frac{D^6}{D + 0{,}0255}.$$

Donnons à D des valeurs distantes de 0,01. On pourra, si l'on veut, mettre la valeur de A sous la forme approchée

$$A = D^3\,[D^2 - 0{,}0255\,D + 0{,}000650]$$

pour calculer sa valeur quand D est plus petit que 0,3; et prendre

$$A = D^4\,(D - 0{,}0255)$$

lorsque D est plus grand que 0,3.

On obtient ainsi la table VIII. L'application de la méthode graphique donnerait aisément une table des valeurs de D correspondant à des valeurs équidistantes de A. Toutefois, comme les ordonnées de la courbe qui représente D sont d'abord très-petites, il faudrait construire à une très-grande échelle la partie de la courbe qui correspond à de petites valeurs de A.

166. *Exemple* III. *Calcul de la détente de la valeur.* Le travail développé par la vapeur dans la course du piston d'une machine est égal à

$$T = \frac{n}{60}\,10000\,PV\left(1 + l\,\frac{V_1}{V} - \frac{P'}{P_1}\right)$$

(Morin, *Méc. pratique.*)

Le rapport $\frac{V_1}{V}$ est ce qu'on nomme la détente. Pour la calculer lorsque T est donné par l'expérience, n, P, P', V_1 étant d'ailleurs connus, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{T}{V_1} + \frac{n}{60} 10000\, P' = \frac{n}{60} 10000\, P \frac{V}{V_1}\left(1 + l\, \frac{V_1}{V}\right);$$

posant

$$\frac{V_1}{V} = x \quad \text{et} \quad \frac{T}{V_1}\, \frac{60}{n \,.\, 10000 P} + \frac{P'}{P} = a,$$

il vient

$$\frac{1 + lx}{x} = a,$$

équation que l'on résoudra à l'aide de la table IX.

167. *Exemple* IV. *De la répartition d'une pression sur une base d'appui rectangulaire.* En cherchant comment une pression totale se répartit sur une base d'appui rectangulaire quand le centre de pression est donné sur une diagonale du rectangle entre certaines positions extrêmes, on arrive à l'équation suivante. (Bresse, *Résistance des matériaux.*)

$$(m - p)\,[m^3 - 2\,(m - 1)^3] = \frac{1}{2}\,[m^4 - 2\,(m - 1)^4]$$

où p désigne un nombre variable compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{6}$.

Pour trouver les valeurs de m qui satisfont à cette équation, nous chercherons les limites entre lesquelles varie m quand p varie entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{6}$. Nous formerons ensuite une table des valeurs de m pour des valeurs équidistantes de p.

L'équation précédente peut s'écrire

$$1 - \frac{p}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{m}{m-1}\right)^4 - 2}{\left(\frac{m}{m-1}\right)^4 - 2\,\frac{m}{m-1}};$$

posant $\frac{m}{m-1} = x$, il vient :

$$1 - \frac{p}{m} + = \frac{x^4 - 2}{2\,(x^4 - 2x)}$$

et en effectuant la division dans le second membre :

$$1 - \frac{p}{m} = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{x}\,\frac{1}{x^3 - 2},$$

d'où l'on tire, en remplaçant m par sa valeur,

$$p = \frac{m}{2} - \frac{1}{\left(\frac{m}{m-1}\right)^3 - 2};$$

en sorte que les racines de l'équation proposée s'obtiendront par l'intersection des deux courbes

$$y = \frac{1}{\left(\frac{m}{m-1}\right)^3 - 2}$$

et

$$y = \frac{m}{2} - p.$$

La première est indépendante de p; la seconde est une droite facile à construire pour chaque valeur de ce paramètre. En la traçant pour les valeurs extrêmes de p, savoir pour $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{5}{6}$, on reconnaît que l'équation proposée, lorsque p reste compris entre les limites précédentes, peut avoir quatre racines. Deux d'entre elles sont plus petites que l'unité; une autre, la seule qui convienne au problème, est comprise entre 1 et 2; la quatrième est entre 2 et 5. Lorsque p dépasse une valeur un peu supérieure à $1/2$, les deux premières racines disparaissent, mais les deux dernières subsistent.

Pour calculer celle qui, pour les diverses valeurs de p, reste entre 1 et 2, donnons à m des valeurs distantes de 0, 1, depuis 1 jusqu'à 2, nous obtenons le tableau suivant :

m	*p*
1,0	0,5000
1,1	5492
1,2	5953
1,3	6374
1,4	6755
1,5	7100
1,6	7411
1,7	7689
1,8	7935
1,9	8151
2,0	8333

Construisons les valeurs de m correspondant aux diverses valeurs de p; en prenant le mètre pour unité, les millièmes seront aisément représentés. La mesure des valeurs de m correspondant à des valeurs de p distantes de 0,02, donnera la table ci-dessous, pour servir au calcul de la valeur de m correspondant à une valeur donnée de p.

p	*m*	*p*	*m*
0,50	1,000	0,68	1,412
52	1,041	70	1,469
54	1,082	72	1,530
56	1,123	74	1,596
58	1,167	76	1,667
60	1,212	78	1,746
62	1,258	80	1,832
64	1,306	82	1,926
66	1,357		

168. *Condition de réalité des racines d'une équation renfermant un paramètre arbitraire.* Il arrive fréquemment qu'une équation, renfermant un paramètre arbitraire, n'a plus de racines réelles lorsque ce paramètre dépasse certaines limites ou qu'elle en perd un certain nombre. Pour montrer comment

on arrive à la condition de réalité des racines de l'équation, prenons un exemple et soit l'équation

$$e^x + e^{-x} = 2\,ax,$$

que l'on rencontre dans l'étude de la chaînette.

Si l'on pose $y = e^x + e^{-x}$, les racines de cette équation seront déterminées par l'intersection de cette courbe (fig. 14, page 26) avec la droite

$$y = 2\,ax.$$

D'où l'on voit que l'équation proposée ne peut avoir plus de deux racines réelles et qu'elle n'en a aucune si a est inférieur à la valeur a', pour laquelle elle a deux racines égales. Or, on a vu, § 47, que si une équation a deux racines égales, cette racine est commune à l'équation proposée et à la dérivée; on a donc à la fois

$$e^x + e^{-x} = 2\,ax$$

et

$$e^a - e^{-a} = 2a.$$

Éliminant x, il vient

$$a\,l\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) - \sqrt{a^2+1} = 0,$$

équation qui donne la valeur limite a'.

En traçant par l'origine une tangente à la courbe $y = e^x + e^{-x}$, on trouvera une valeur approchée $a' = 1{,}50$, et à l'aide de l'équation on obtiendra la valeur plus approchée $a' = 1{,}5089$.

CHAPITRE IV.

TABLES NUMÉRIQUES.

On a réuni diverses tables utiles dans la résolution des équations numériques et dont l'étendue sera en général suffisante pour les calculs.

Table I. Cette table renferme les nombres usuels que l'on

rencontre ordinairement dans les formules, ainsi que leurs logarithmes.

Table II. A l'aide de la table II on pourra aisément convertir les degrés, minutes et secondes en parties du cercle, le rayon étant pris pour unité et réciproquement.

La table III donne les racines carrées et cubiques des nombres de 1 à 100 avec trois décimales. La racine d'un nombre $a + h$, compris entre deux nombres de la table, sera donnée approximativement par la formule

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{h}{2a}\right),$$

s'il s'agit d'une racine carrée, et l'erreur sera de l'ordre de

$$\frac{h^2}{8a^2}\sqrt{a}.$$

S'il s'agit d'une racine cubique, on aura :

$$\sqrt[3]{a+h} = \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{h}{3a}\right),$$

avec une erreur de l'ordre de

$$\frac{h^2}{9a^2}\sqrt[3]{a}$$

La table IV donne les cinq premières puissances des nombres de 0,01 à 2, de centièmes en centièmes, avec 6 décimales; et, par suite, avec une approximation variable, suivant l'exposant de la puissance, les cinq premières puissances des 200 premiers nombres.

Table V. Cette table donne les lignes trigonométriques des arcs de demi-degré en demi-degré, ce qui équivaut à peu près à des longueurs d'arc de centièmes en centièmes dans un cercle de rayon 1.

Table VI. On rencontre assez fréquemment les fonctions exponentielles dans les équations transcendantes. On a donné

leurs valeurs pour des valeurs de la variable distantes de 0,1, depuis 0 à 1, et de 0,05, depuis 1 jusqu'à 3.

Table VII. On pourra connaître à l'aide de cette table les racines des équations du troisième degré ramenées à la forme $4x^3 - 3x = a$; α et β désignent les deux racines qui sont de même signe lorsque les trois racines sont réelles. Cette table a été construite à l'aide d'un tracé graphique et les valeurs de α, β, γ sont données avec une approximation de 0,001 environ.

Les tables VIII, XI, ont été construites en vue d'applications spéciales définies dans les § 165, 166.

TABLE I.

Nombres usuels.

Nombres.	Log.	Nombres.	Log.
$\pi = 3,14159$	0,4971499	$\frac{1}{\pi} = 0,31831$	$\bar{1},5028501$
$2\pi = 6,28319$	0,7981799	$\frac{1}{2\pi} = 0,15915$	$\bar{1},2018201$
$\frac{\pi}{2} = 1,57080$	0,1961199	$\frac{2}{\pi} = 0,63662$	$\bar{1},6038801$
$\frac{\pi}{4} = 0,78540$	$\bar{1},8950899$	$\frac{4}{\pi} = 1,27324$	0,1049201
$\frac{\pi}{6} = 0,52360$	$\bar{1},7189986$	$\frac{6}{\pi} = 1,90986$	0,2810014
$\frac{4}{3}\pi = 4,18879$	0,6220886	$\frac{3}{4\pi} = 0,23873$	$\bar{1},3779114$
$\pi^2 = 9,86960$	0,9942997	$\frac{1}{\pi^2} = 0,10132$	$\bar{1},0057003$
$\sqrt{\pi} = 1,77245$	0,2485749	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	$\bar{1},7514251$
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,80600$	$\bar{1},9063329$	$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1,24070$	0,0936671
$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} = 1,61199$	0,2073629	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,62035$	$\bar{1},7926371$
$\frac{\pi}{648000} = 0,0000048$	$\bar{6},6855749$	$\frac{648000}{\pi} = 206264,7$	5,3144251
$e = 2,71828$	0,4342945	$\frac{1}{e} = 0,36788$	$\bar{1},5657055$
$M = 0,43429$	$\bar{1},6377843$	$\frac{1}{M} = 2,30259$	0,3622157
$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70711$	$\bar{1},8494850$	$\frac{1}{\sqrt{7}} = 0,37796$	$\bar{1},5774510$
$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735$	$\bar{1},7614394$	$\frac{1}{\sqrt{8}} = 0,35355$	$\bar{1},5484550$
$\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,44721$	$\bar{1},6505150$	$\frac{1}{\sqrt{10}} = 0,31620$	$\bar{1},500000$
$\frac{1}{\sqrt{6}} = 0,40825$	$\bar{1},6109244$		

TABLE II.

Conversion des degrés, minutes et secondes en parties décimales du rayon.

N.	Degrés.	Minutes.	Secondes.
1	0,017453	0,000291	0,000048
2	34907	582	97
3	52360	873	145
4	69813	1164	194
5	87267	1454	242
6	104720	1745	291
7	122173	2036	339
8	139626	2327	388
9	157080	2618	436

Conversions des parties décimales du rayon en degrés, minutes et secondes.

N.	Dixièmes.	Centièmes.	Millièmes.	Dix-mill.	Cent-mill.
1	5° 43′ 46″,5	0° 34′ 22″,7	3′ 26″,3	0′ 20″,6	2″,1
2	11° 27′ 33″,0	1° 8′ 45″,3	6′ 52″,5	0′ 41″,3	4″,1
3	17° 11′ 19″,4	1° 43′ 7″,9	10′ 18″,8	1′ 1″,9	6″,2
4	22° 55′ 5″,9	2° 17′ 30″,6	13′ 45″,1	1′ 22″,5	8″,3
5	28° 38′ 52″,4	2° 51′ 53″,2	17′ 11″,3	1′ 43″,1	10″,3
6	34° 22′ 38″,9	3° 26′ 15″,9	20′ 37″,6	2′ 3″,8	12″,4
7	40° 6′ 25″,4	4° 0′ 38″,5	24′ 3″,9	2′ 24″,4	14″,4
8	45° 50′ 11″,8	4° 35′ 1″,2	27′ 30″,1	2′ 45″,0	16″,5
9	51° 33′ 58″,3	5° 9′ 23″,8	30′ 56″,4	3′ 5″,6	18″,6

TABLE III.

Racines carrées et racines cubiques.

N.	R. carrée.	R. cubique.	N.	R. carrée.	R. cubique.
1	1,000	1,000	51	7,141	3,708
2	1,414	1,259	52	7,211	3,732
3	1,732	1,442	53	7,280	3,756
4	2,000	1,587	54	7,348	3,779
5	2,236	1,709	55	7,416	3,802
6	2,449	1,817	56	7,483	3,825
7	2,645	1,912	57	7,549	3,848
8	2,828	2,000	58	7,615	3,870
9	3,000	2,080	59	7,681	3,892
10	3,162	2,154	60	7,745	3,914
11	3,316	2,223	61	7,810	3,936
12	3,464	2,289	62	7,874	3,957
13	3,605	2,351	63	7,957	3,979
14	3,741	2,410	64	8,000	4,000
15	3,872	2,466	65	8,062	4,020
16	4,000	2,519	66	8,124	4,041
17	4,123	2,571	67	8,185	4,061
18	4,242	2,620	68	8,246	4,081
19	4,358	2,668	69	8,306	4,101
20	4,472	2,714	70	8,366	4,121
21	4,582	2,758	71	8,426	4,140
22	4,690	2,802	72	8,485	4,160
23	4,795	2,843	73	8,544	4,179
24	4,898	2,884	74	8,602	4,198
25	5,000	2,924	75	8,660	4,217
26	5,099	2,962	76	8,717	4,235
27	5,196	3,000	77	8,744	4,254
28	5,291	3,036	78	8,831	4,272
29	5,385	3,072	79	8,888	4,290
30	5,477	3,107	80	8,944	4,308
31	5,567	3,141	81	9,000	4,326
32	5,656	3,174	82	9,055	4,344
33	5,744	3,207	83	9,110	4,362
34	5,830	3,239	84	9,165	4,379
35	5,916	3,271	85	9,219	4,396
36	6,000	3,301	86	9,273	4,414
37	6,082	3,332	87	9,327	4,431
38	6,164	3,361	88	9,380	4,447
39	6,244	3,391	89	9,433	4,461
40	6,324	3,419	90	9,486	4,481
41	6,403	3,448	91	9,539	4,497
42	6,480	3,476	92	9,591	4,514
43	6,557	3,503	93	9,643	4,530
44	6,633	3,530	94	9,695	4,546
45	6,708	3,556	95	9,746	4,562
46	6,782	3,583	96	9,797	4,578
47	6,855	3,608	97	9,848	4,594
48	6,928	3,634	98	9,899	4,610
49	7,000	3,659	99	9,949	4,626
50	7,071	3,684	100	10,000	4,641

TABLE IV.

Table des cinq premières puissances des nombres de 1 à 200.

N.	2me	3me	4me	5me
0,01	0,0001	0,000001	0,000000	0,000000
2	4	8	0	0
3	9	27	1	0
4	16	64	3	0
5	25	125	6	0
6	36	216	13	1
7	49	343	24	2
8	64	512	41	3
9	81	729	66	6
0,10	0,0100	0,001000	0,000100	0,000010
11	121	1331	146	16
12	144	1728	207	25
13	169	2197	286	37
14	196	2744	384	54
15	225	3375	506	76
16	256	4096	655	105
17	289	4913	835	142
18	324	5832	1050	189
19	361	6859	1303	248
0,20	0,0400	0,008000	0,001600	0,000320
21	441	9261	1945	408
22	484	10648	2343	515
23	529	12167	2798	644
24	576	13824	3318	796
25	625	15625	3906	977
26	676	17576	4570	1188
27	729	19683	5314	1435
28	784	21952	6147	1721
29	841	24389	7073	2051
0,30	0,0900	0,027000	0,008100	0,002430
31	0961	29791	9235	2863
32	1024	32768	10486	3355
33	1089	35937	11859	3914
34	1156	39304	13363	4544
35	1225	42875	15006	5252
36	1296	46656	16796	6047
37	1369	50653	18741	6934
38	1444	54872	20851	7924
39	1521	59319	23134	9024
0,40	0,1600	0,064000	0,025600	0,010240
41	1681	68921	28258	11586
42	1764	74088	31117	13070
43	1849	79507	34188	14701
44	1936	85184	37481	16492
45	2025	91125	41006	18453
46	2116	97336	44775	20596
47	2209	103823	48797	22935
48	2304	110592	53084	25480
49	2401	117649	57648	28248
50	2500	125000	62500	31250

N.	2me	3me	4me	5me
0,51	0,2601	0,132651	0,067652	0,034503
52	2704	140608	73116	38020
53	2809	148877	78905	41820
54	2916	157464	85031	45917
55	3025	166375	91506	50328
56	3136	175616	98345	55073
57	3249	185193	105560	60169
58	3364	195112	113165	65636
59	3481	205379	121174	71492
0,60	0,3600	0,216000	0,129600	0,077760
61	3721	226981	138458	84460
62	3844	238328	147763	91613
63	3969	250047	157530	99244
64	4096	262114	167772	107374
65	4225	274625	178506	116029
66	4356	287496	189747	125233
67	4489	300763	201511	135013
68	4624	314432	213814	145393
69	4761	328509	226671	156403
0,70	0,4900	0,343000	0,240100	0,168070
71	5041	357911	254117	180423
72	5184	373248	268739	193492
73	5329	389017	283980	207307
74	5476	405224	299866	221901
75	5625	421875	316406	237305
76	5776	438976	333622	253353
77	5929	456533	351530	270678
78	6084	474552	370151	288717
79	6241	493039	389501	307706
0,80	0,6400	0,512000	0,409600	0,327680
81	6561	531441	430467	348678
82	6724	551368	452122	370740
83	6889	571787	474583	393904
84	7056	592704	497871	418212
85	7225	614125	522001	443705
86	7396	636056	547080	470427
87	7569	658503	572898	498421
88	7744	681472	599695	527732
89	7921	704969	627422	558406
0,90	0,8100	0,729000	0,656100	0,590490
91	8281	753571	685750	624032
92	8464	778688	716393	659082
93	8649	804357	748052	695688
94	8836	830584	780749	733904
95	9025	857375	814506	773781
96	9216	884736	849347	815373
97	9409	912673	885293	858734
98	9604	941192	922368	903921
99	9801	970299	960596	950990
1,00	1,0000	1,000000	1,000000	1,000000

N.	2me	3me	4me	5me
1,01	1,0201	1,030301	1,040605	1,051010
1,02	1,0404	1,061208	1,082432	1,104081
1,03	1,0609	1,092727	1,125509	1,159274
1,04	1,0816	1,124864	1,169859	1,216653
1,05	1,1025	1,157625	1,215506	1,276282
1,06	1,1236	1,191016	1,262477	1,338226
1,07	1,1449	1,225043	1,310796	1,402552
1,08	1,1664	1,259712	1,360489	1,469328
1,09	1,1881	1,295029	1,411582	1,538624
1,10	1,2100	1,331000	1,464100	1,610510
1,11	1,2321	1,367634	1,518070	1,685058
1,12	1,2544	1,404928	1,573519	1,762342
1,13	1,2769	1,442877	1,630474	1,842435
1,14	1,2996	1,481544	1,688860	1,955415
1,15	1,3225	1,520865	1,749006	2,011357
1,16	1,3456	1,560896	1,810639	2,100342
1,17	1,3689	1,601613	1,873887	2,192448
1,18	1,3924	1,643032	1,938778	2,287758
1,19	1,4161	1,685159	2,005339	2,386354
1,20	1,4400	1,728000	2,073600	2,488320
1,21	1,4641	1,771561	2,143589	2,593742
1,22	1,4884	1,815848	2,215335	2,702708
1,23	1,5129	1,860867	2,288866	2,815306
1,24	1,5376	1,906624	2,364214	2,931635
1,25	1,5625	1,953125	2,441406	3,051758
1,26	1,5876	2,000376	2,520474	3,175797
1,27	1,6129	2,048383	2,601446	3,303837
1,28	1,6384	2,097152	2,684355	3,435974
1,29	1,6641	2,146689	2,769229	3,572305
1,30	1,6900	2,197000	2,856100	3,712930
1,31	1,7161	2,248091	2,944999	3,857949
1,32	1,7424	2,299968	3,035958	4,007464
1,33	1,7689	2,352637	3,129007	4,161570
1,34	1,7956	2,406104	3,224179	4,320400
1,35	1,8225	2,460375	3,321506	4,484033
1,36	1,8496	2,515456	3,421020	4,652588
1,37	1,8769	2,571353	3,522754	4,826172
1,38	1,9044	2,620872	3,626739	5,004900
1,39	1,9321	2,685619	3,733010	5,188884
1,40	1,9600	2,744000	3,841600	5,378240
1,41	1,9881	2,803221	3,952542	5,573084
1,42	2,0164	2,863288	4,065869	5,773534
1,43	2,0449	2,924207	4,181616	5,979711
1,44	2,0736	2,985984	4,299817	6,191736
1,45	2,1025	3,048625	4,420506	6,409734
1,46	2,1316	3,112136	4,543719	6,633829
1,47	2,1609	3,176523	4,669489	6,864149
1,48	2,1904	3,241792	4,797852	7,100821
1,49	2,2201	3,307949	4,928844	7,343978
1,50	2,2500	3,375000	5,062500	7,593750

N.	2me	3me	4me	5me
1,51	2,2801	3,442951	5,198856	7,840273
1,52	2,3104	3,511808	5,337948	8,113682
1,53	2,3409	3,581577	5,479813	8,384114
1,54	2,3716	3,652264	5,624487	8,661709
1,55	2,4025	3,723875	5,772006	8,948610
1,56	2,4336	3,796416	5,922409	9,239758
1,57	2,4649	3,869893	6,071694	9,532560
1,58	2,4964	3,944312	6,232013	9,846580
1,59	2,5281	4,019679	6,392290	10,163740
1,60	2,5600	4,096000	6,553600	10,485760
1,61	2,5921	4,173281	6,718982	10,817562
1,62	2,6244	4,251528	6,887475	11,157710
1,63	2,6569	4,330747	7,059118	11,506362
1,64	2,6896	4,410944	7,233948	11,863675
1,65	2,7225	4,492125	7,412201	12,229810
1,66	2,7556	4,574296	7,593331	12,604930
1,67	2,7889	4,657463	7,777963	12,989199
1,68	2,8224	4,741632	7,965942	13,382782
1,69	2,8561	4,826809	8,157307	13,785849
1,70	2,8900	4,913000	8,352100	14,198570
1,71	2,9241	5,000211	8,550361	14,621117
1,72	2,9584	5,088448	8,752131	15,053665
1,73	2,9929	5,177717	8,957450	15,489389
1,74	3,0276	5,268024	9,166362	15,949489
1,75	3,0625	5,359375	9,378906	16,413086
1,76	3,0976	5,451776	9,595126	16,887421
1,77	3,1329	5,545233	9,815062	17,372660
1,78	3,1684	5,639752	10,038757	17,868990
1,79	3,2041	5,735339	10,267257	18,380389
1,80	3,2400	5,832000	10,497600	18,895680
1,81	3,2761	5,929741	10,742831	19,444524
1,82	3,3124	6,028568	10,971994	19,967029
1,83	3,3489	6,128487	11,215131	20,523690
1,84	3,3856	6,229504	11,462287	21,090609
1,85	3,4225	6,331625	11,713506	21,679987
1,86	3,4596	6,434856	11,968832	22,262028
1,87	3,4969	6,539203	12,128310	22,679939
1,88	3,5344	6,644672	12,491983	23,484929
1,89	3,5721	6,751269	12,759899	24,116208
1,90	3,6100	6,859000	13,032100	24,760990
1,91	3,6481	6,967871	13,308637	25,309490
1,92	3,6864	7,077888	13,589545	26,091926
1,93	3,7249	7,189057	13,874880	26,778518
1,94	3,7636	7,301384	14,164685	27,479489
1,95	3,8025	7,414875	14,459006	28,195065
1,96	3,8416	7,529536	14,757891	28,925465
1,97	3,8809	7,645373	15,061385	29,670928
1,98	3,9204	7,762392	15,369536	30,431682
1,99	3,9601	7,880599	15,682392	31,207960
2,00	4,0000	8,000000	16,000000	32,000000

TABLE V.

Table des longueurs des lignes trigonométriques.

arc	sinus	tangente	secante	cosinus	cotang.	cosèc.	
0°	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	∞	∞	90°
30′	0087	0087	1,0000	1,0000	114,59	114,59	30′
1°	0174	0174	1,0002	0,9998	57,290	57,298	89°
30′	0261	0262	1,0003	9997	38,188	38,202	30′
2°	0349	0349	1,0006	9994	28,636	28,653	88°
30′	0436	0437	1,0010	9990	22,904	22,926	30
3°	0523	0524	1,0014	9986	19,081	19,107	87°
30′	0610	0612	1,0019	9981	16,350	16,380	30′
4°	0698	0699	1,0024	9976	14,301	14,336	86°
30′	0784	0787	1,0031	9969	12,706	12,745	30′
5°	0872	0875	1,0038	9962	11,430	11,473	85°
30′	0958	0963	1,0046	9954	10,385	10,433	30′
6°	1045	1051	1,0055	9945	9,5144	9,5668	84°
30′	1132	1139	1,0065	9936	8,7769	8,8337	30′
7°	1219	1228	1,0075	9925	8,1443	8,2055	83°
30′	1305	1317	1,0086	9914	7,5958	7,6613	30′
8°	1392	1405	1,0098	9903	7,1154	7,1853	82°
30′	1478	1495	1,0111	9890	6,6912	6,7655	30′
9°	1564	1584	1,0125	9877	6,3138	6,3925	81°
30′	1650	1673	1,0139	9863	5,9758	6,0589	30′
10°	1736	1743	1,0154	9848	5,6713	5,7588	80°
30′	1822	1853	1,0170	9833	5,3955	5,4874	30′
11°	1908	1944	1,0187	9816	5,1446	5,2408	79°
30′	1994	2035	1,0205	9799	4,9152	5,0159	30′
12°	2079	2126	1,0223	9781	4,7046	4,8097	78°
30′	2164	2217	1,0243	9763	4,5107	4,6202	30′
13°	2250	2309	1,0263	9744	4,3315	4,4454	77°
30′	2334	2401	1,0284	9724	4,1653	4,2837	30′
14°	2419	2493	1,0306	9703	4,0108	4,1336	76°
30′	2504	2586	1,0329	9681	3,8667	3,9939	30′
15°	2588	2679	1,0353	9659	3,7321	3,8637	75°
30′	2672	2773	1,0377	9636	3,6059	3,7420	30′
16°	2756	2867	1,0403	9613	3,4874	3,6279	74°
30′	2840	2962	1,0429	9588	3,3759	3,5209	30′
17°	2924	3057	1,0457	9563	3,2709	3,4203	73°
30′	3007	3153	1,0485	9537	3,1716	3,3255	30′
18°	3090	3249	1,0515	9511	3,0777	3,2361	72°
30′	3173	3346	1,0545	9483	2,9887	3,1515	30′
19°	3256	3443	1,0576	9455	2,9042	3,0716	71°
30′	3338	3541	1,0608	9426	2,8239	2,9957	30′
20°	3420	3640	1,0642	9397	2,7475	2,9238	70°
30′	3502	3739	1,0676	9367	2,6746	2,8555	30′
21°	3584	3839	1,0711	9336	2,6051	2,7904	69°
30′	3665	3939	1,0748	9304	2,5386	2,7285	30′
22°	3746	4040	1,0785	9272	2,4751	2,6695	68°
30′	3827	4142	1,0824	9239	2,4142	2,6131	30′
	sinus	cosin.	cotg.	sin.	tang.	séc.	arc

arc	sinus	tangente	sécante	cos.	cotang.	coséc.	
23°	0,3907	0,4245	1,0864	0,9205	2,3559	2,5593	67°
30′	3987	4348	1,0904	9171	2,2998	2,5078	30′
24°	4067	4452	1,0946	9135	2,2460	2,4586	66°
30′	4147	4557	1,0989	9100	2,1943	2,4114	30′
25°	4226	4663	1,1034	9063	2,1445	2,3662	65°
30′	4305	4770	1,1079	9026	2,0965	2,3228	30′
26°	4384	4877	1,1126	8988	2,0503	2,2812	64°
30′	4462	4987	1,1174	8949	2,0057	2,2412	30′
27°	4540	5095	1,1223	8910	1,9626	2,2027	63°
30′	4617	5206	1,1274	8870	1,9210	2,1657	30′
28°	4695	5317	1,1326	8829	1,8807	2,1301	62°
30′	4772	5430	1,1379	8788	1,8418	2,0957	30′
29°	4848	5543	1,1434	8746	1,8040	2,0627	61°
30′	4924	5658	1,1490	8704	1,7675	2,0308	30′
30°	5000	5774	1,1547	8660	1,7321	2,0000	60°
30′	5075	5890	1,1606	8616	1,6977	1,9703	30′
31°	5150	6009	1,1666	8572	1,6643	1,9416	59°
30′	5225	6128	1,1728	8526	1,6319	1,9139	30′
32°	5299	6249	1,1792	8480	1,6003	1,8871	58°
30′	5373	6371	1,1857	8434	1,5697	1,8612	30′
33°	5446	6494	1,1924	8387	1,5399	1,8361	57°
30′	5519	6619	1,1920	8339	1,5108	1,8118	30′
34°	5592	6745	1,2062	8290	1,4826	1,7883	56°
30′	5664	6873	1,2134	8241	1,4550	1,7655	30′
35°	5736	7002	1,2208	8192	1,4281	1,7434	55°
30′	5807	7133	1,2283	8141	1,4019	1,7221	30′
36°	5878	7265	1,2361	8090	1,3764	1,7013	54°
30′	5948	7400	1,2440	8039	1,3514	1,6812	30′
37°	6018	7534	1,2521	7986	1,3270	1,6616	53°
30′	6088	7673	1,2605	7934	1,3032	1,6427	30′
38°	6157	7813	1,2690	7880	1,2799	1,6243	52°
30′	6225	7954	1,2778	7826	1,2572	1,6064	30′
39°	6293	8098	1,2868	7771	1,2349	1,5890	51°
30′	6361	8243	1,2960	7716	1,2131	1,5721	30′
40°	6428	8391	1,3054	7660	1,1918	1,5557	50°
30′	6494	8541	1,3151	7604	1,1708	1,5398	30′
41°	6561	8693	1,3250	7547	1,1150	1,5243	49°
30′	6626	8847	1,3352	7489	1,1130	1,5092	30′
42°	6691	9004	1,3456	7431	1,1111	1,4945	48°
30′	6756	9163	1,3563	7373	1,0913	1,4802	30′
43°	6820	9325	1,3673	7314	1,0724	1,4663	47°
30′	6884	9490	1,3786	7254	1,0538	1,4527	30′
44°	6947	9657	1,3902	7193	1,0355	1,4396	46°
30′	7009	9827	1,4020	7133	1,0176	1,4267	30′
45°	7072	1,0000	1,4142	7072	1,0000	1,4142	45°
	cos.	cotang.	coséc.	sinus	tang.	séc.	arc

TABLE VI.

Fonctions exponentielles.

x	e^x	e^{-x}	$e^x + e^{-x}$	$e^x - e^{-x}$
0,0	1,0000	1,0000	2,0000	0,0000
0,1	1,1051	0,9048	2,0099	0,2003
0,2	1,2214	0,8187	2,0401	0,4027
0,3	1,3498	0,7408	2,0906	0,6090
0,4	1,4918	0,6703	2,1621	0,8215
0,5	1,6487	0,6065	2,2552	1,0422
0,6	1,8221	0,5488	2,3709	1,2733
0,7	2,0137	0,4966	2,5103	1,5171
0,8	2,2255	0,4493	2,6748	1,7762
0,9	2,4596	0,4065	2,8661	2,0531
1,0	2,7183	0,3679	3,0862	2,3505
1,05	2,8577	0,3499	3,2076	2,5078
1,10	3,0042	0,3328	3,3370	2,6714
1,15	3,1582	0,3166	3,4748	2,8416
1,20	3,3201	0,3012	3,6212	3,0189
1,25	3,4903	0,2865	3,7768	3,2038
1,30	3,6693	0,2725	3,9418	3,3968
1,35	3,8574	0,2592	4,1166	3,5982
1,40	4,0552	0,2466	4,3017	3,8086
1,45	4,2631	0,2346	4,4976	4,0285
1,50	4,4817	0,2231	4,7048	4,2586
1,55	4,7115	0,2122	4,9237	4,4993
1,60	4,9531	0,2019	5,1550	4,7512
1,65	5,2070	0,1920	5,3990	5,0150
1,70	5,4740	0,1827	5,6567	5,2914
1,75	5,7546	0,1737	5,9283	5,5809
1,80	6,0497	0,1653	6,2149	5,8844
1,85	6,3598	0,1572	6,5170	6,2026
1,90	6,6859	0,1496	6,8355	6,5363
1,95	7,0287	0,1423	7,1710	6,8864
2,00	7,3891	0,1353	7,5244	7,2538
2,05	7,7679	0,1287	7,8966	7,6392
2,10	8,1661	0,1224	8,2885	8,0437
2,15	8,5849	0,1165	8,7014	8,4684
2,20	9,0250	0,1108	9,1358	8,9142
2,25	9,4877	0,1054	9,5931	9,3823
2,30	9,9742	0,1003	10,0745	9,8739
2,35	10,4855	0,0954	10,5809	10,3901
2,40	11,0232	0,0907	11,1139	10,9325
2,45	11,5883	0,0863	11,6746	11,5020
2,50	12,1825	0,0821	12,2646	12,1004
2,55	12,8071	0,0781	12,8852	12,7290
2,60	13,4637	0,0743	13,5380	13,3894
2,65	14,1540	0,0707	14,2247	14,0833
2,70	14,8797	0,0672	14,9469	14,8125
2,75	15,6426	0,0639	15,7065	15,5787
2,80	16,4446	0,0608	16,5054	16,3838
2,85	17,2878	0,0578	17,3456	17,2300
2,90	18,1741	0,0550	18,2291	18,1191
2,95	19,1060	0,0523	19,1583	19,0537
3,00	20,0855	0,0498	20,1353	20,0357

TABLE VII.

Table des racines de l'équation du troisième degré

$$4x^3 - 3x = a \quad (a < 1).$$

a	α	β	γ	a	α	β	γ
0,00	0,000	0,866	0,866	0,61	0,217	0,736	0,954
2	6	863	869	62	222	733	955
4	12	859	871	63	226	730	956
6	19	855	874	64	230	727	957
8	25	851	876	65	234	725	959
0,10	32	847	879	66	239	722	961
12	39	844	882	67	243	719	962
14	45	840	885	68	247	716	963
16	52	836	888	69	251	713	964
18	59	832	891	0,70	256	710	965
0,20	66	829	894	71	260	707	966
22	72	825	897	72	264	703	967
24	79	821	900	73	269	699	968
26	86	817	903	74	274	695	969
28	93	813	906	75	278	692	970
0,30	100	810	909	76	282	688	971
32	107	806	912	77	287	684	972
34	114	801	915	78	292	681	973
36	121	797	918	79	298	677	975
38	129	793	921	0,80	303	673	976
0,40	136	789	924	81	308	669	977
42	143	785	928	82	314	664	978
44	150	780	930	83	319	660	979
46	158	775	933	84	325	656	981
48	165	770	935	85	332	651	983
0,50	173	765	938	86	338	646	984
52	181	760	941	87	345	641	986
54	189	755	944	88	352	635	987
56	196	750	947	89	359	629	988
58	205	745	950	0,90	265	624	989
0,60	213	740	953				
0,905	0,368	0,621	0,990	0,955	0,411	0,584	0,995
910	372	619	991	960	416	579	995
915	376	615	991	965	422	574	996
920	380	612	992	970	428	569	997
925	384	608	992	975	434	563	997
930	388	605	993	980	441	557	998
935	392	601	993	985	450	548	998
940	397	597	994	990	460	539	999
945	401	593	994	995	471	528	999
950	406	528	994	1,000	500	500	1,000

TABLE VII.

Table des racines de l'équation du troisième degré

$4x^3 - 3x = a \quad (a > 1).$

a	γ	a	γ	a	γ
1,0	1,000	4,0	1,245	7,0	1,410
1,2	1,021	4,2	1,257	7,2	1,419
1,4	1,041	4,4	1,270	7,4	1,429
1,6	1,061	4,6	1,282	7,6	1,438
1,8	1,080	4,8	1,294	7,8	1,447
2,0	1,098	5,0	1,306	8,0	1,456
2,2	1,115	5,2	1,317	8,2	1,465
2,4	1,132	5,4	1,328	8,4	1,474
2,6	1,147	5,6	1,339	8,6	1,483
2,8	1,162	5,8	1,349	8,8	1,491
3,0	1,177	6,0	1,359	9,0	1,500
3,2	1,192	6,2	1,370	9,2	1,509
3,4	1,205	6,4	1,380	9,4	1,517
3,6	1,218	6,6	1,390	9,6	1,525
3,8	1,231	6,8	1,400	9,8	1,533

TABLE VIII.

Détermination du diamètre des tuyaux de conduite.

D	A	D	A	D	A	D	A
0,01	0,00000 0000	0,26	0,00 108»	0,51	0,0 327	0,76	0,245
2	4	7	131	2	361	7	262
3	21	8	159	3	398	8	280
4	79	9	189	4	438	9	298
5	23»	0,30	224	5	480	0,80	317
6	59	1	261	6	526	1	337
7	129	2	318	7	575	2	359
8	256	3	360	8	628	3	382
9	471	4	420	9	685	4	405
0,10	810	5	497	0,60	746	5	430
1	0,0000 132»»	6	561	1	808	6	456
2	207	7	646	2	877	7	483
3	312	8	737	3	951	8	512
4	457	9	842	4	0,103»	9	542
5	652	0,40	958	5	111	0,90	574
6	908	1	0,0 108»»	6	120	1	607
7	0,000 123»»»	2	123	7	130	2	641
8	166	3	138	8	140	3	677
9	220	4	155	9	151	4	714
0,20	284	5	174	0,70	162	5	753
1	365	6	194	1	174	6	794
2	461	7	217	2	187	7	837
3	577	8	241	3	200	8	881
4	720	9	268	4	214	9	926
0,25	887	0,50	297	5	229	1,00	974

TABLE IX.

Pour servir au calcul de la détente dans une machine à vapeur.

x	a	x	a	x	a	x	a	x	a
1,0	1,000	2,0	0,847	3,0	0,700	4,0	0,597	5,0	0,522
1,1	0,996	2,1	830	3,1	688	4,1	588	5,1	516
1,2	985	2,2	813	3,2	676	4,2	580	5,2	509
1,3	971	2,3	797	3,3	665	4,3	572	5,3	503
1,4	955	2,4	781	3,4	654	4,4	564	5,4	498
1,5	937	2,5	766	3,5	644	4,5	557	5,5	492
1,6	919	2,6	752	3,6	634	4,6	549	5,6	486
1,7	900	2,7	738	3,7	625	4,7	542	5,7	481
1,8	882	2,8	725	3,8	616	4,8	535	5,8	475
1,9	864	2,9	712	3,9	606	4,9	528	5,9	470

FAUTES A CORRIGER.

Page.	Ligne.	Au lieu de	mettez
5	10	$\mathrm{A}x$	Δx
9	18	négatif entier, ou	négatif, entier ou
17	24	n_1 valeurs	n valeurs,
»	25	$n-1$, valeurs	$n-1$ valeurs,
36	7	est égal à 1	est égal à -1
38	18	$y-\frac{m\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0}$	$y-\frac{\mathrm{A}_1}{m\mathrm{A}_0}$
44	21	$1^{m},35$	$1^{m},535$
45	23	approchée.	approchée
46	2	ε_1	ε_2
60	12	racines	racines réelles
81	14	négatif,	négatif;
88	10	$x=\frac{q}{2},\ y=\frac{p-1}{2}$	$x=-\frac{q}{2},\ y=\frac{1-p}{2}$
117	2	40 91	50 111
125		$b\,(x-\alpha)$	$b\,(x-1)\,(x-\alpha)$
126	8	*idem*	*idem*
id.	*id.*	$c\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$	$c\,(x-1)\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$

